

Verallgemeinerte Koordinaten u. Zwangsbedingungen

$$ZB: \quad g_\alpha(\vec{r}_i(t), t) = 0 \quad \begin{matrix} \alpha = 1, \dots, m \\ i = 1, \dots, N \end{matrix}$$

Sind m Bedingungen an die Koordinaten der N Massenpunkte im System.

Eine Zwangsbedingung schränkt die Bewegung eines Massenpunktes auf eine Fläche ein, zwei Zwangsbedingungen auf eine Linie, drei auf einen Punkt. Zwangsbedingungen reduzieren Freiheitsgrade des Systems.

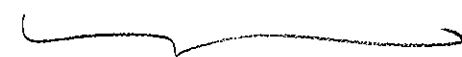
* Lagrange - Glu. 1. Art mit Lagrange Multiplikatoren

λ_α :

$$S[x] = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t) + \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha g_\alpha(x_i(t), t)$$

⇒ Euler - Lagrange - Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = - \sum_{\alpha=1}^m \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i}$$



" $-\vec{\nabla} \left(\sum_{\alpha} \lambda_\alpha g_\alpha \right)$ " = Zwangskräfte

verallgemeinerte Koordinaten: Koordinaten, in denen
die Zwangskräfte verschwinden, also $\frac{\partial g_\alpha}{\partial q_i} = 0$

m Zwangsbedingungen $g_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, t) = 0 \quad \textcircled{*}$
 $\alpha = 1, \dots, m$

Freiheitsgrade: $f = 3N - m$
 $\underbrace{3N}_{3D, N \text{ Teilchen}}$

Wähle q_i mit $i = 1, \dots, f$ und funktionaler

Beziehung $x_n = x_n(q_1, q_2, \dots, q_f, t)$, $n = 1, 2, \dots, 3N$

$\Rightarrow g_\alpha(x_1(q_1, \dots, q_f, t), \dots, x_{3N}(q_1, \dots, q_f, t)) = 0 \quad \textcircled{*}$

so daß $\frac{\partial g_\alpha}{\partial q_i} = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_i} = 0$, $i = 1, \dots, f$