Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I

WS 2014

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. M. Spinrath, Dr. S. Schacht

Zweite Klausur
Abgabe: 14.4.2015

Vorname:
Familienname:

E-Mail-Adresse:

Matrikelnummer: 1 **Tutorgruppe:**

Studienfach:

Versuch: erster zweiter

A1 (10P)		a)(5P)	b)(4P)	c)(1P)			
A2 (10P)		a)(1P)	b)(1P)	c)(2P)	d)(2P)	e) (2P)	f) (2P)
A3 (10P)		a)(2P)	b)(3P)	c)(2P)	d)(3P)		
A4 (10P)		a)(2P)	b)(2P)	c)(2P)	d)(2P)	e)(2P)	
A5 (10P)		a)(1P)	b)(2P)	c)(1P)	d)(2P)	e) (2P)	f) (2P)
Σ (50P)							

Lesen Sie den folgenden Text zu Beginn der Klausur bitte sorgfältig durch!
Bitte schreiben Sie oben in jedes Kästchen maximal einen Buchstaben oder eine Ziffer. Schreiben Sie nichts in die Punktetabelle, sie dient der Korrektur. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer und nummerieren Sie Ihre Blätter fortlaufend durch. Was nicht bewertet werden soll, ist deutlich durchzustreichen. Bitte kennzeichnen Sie die Endergebnisse der Teilaufgaben deutlich, z.B. durch doppeltes Unterstreichen. Wenn Sie mehr Papier brauchen, heben Sie bitte die Hand.
Legen Sie bitte zu Beginn der Klausur Ihre Studentenausweise neben sich auf den Tisch; sie werden während der Klausur kontrolliert. Wer seinen Studentenausweis vergessen hat, verwendet einen anderen Lichtbildausweis.
Die Benutzung elektronischer Geräte (Taschenrechner, Mobiltelefone, Tablet-Computer,...) oder anderer Hilfsmittel (Fachbücher, Aufzeichnungen, ältere Geschwister...) ist nicht gestattet.
Wer zur Toilette geht, gibt das Aufgabenblatt und seine Lösungen beim Aufsichtspersonal ab und erhält alles anschließend zurück. Es ist erlaubt, die bearbeitete Klausur vor Ablauf der Bearbeitungszeit von 2 Zeitstunden abzugeben und den Raum zu verlassen. Jedoch: In den letzten 20 Minuten der Bearbeitungszeit darf niemand mehr den Raum verlassen!
Heften Sie die Blätter mit Ihren Lösungen der Klausuraufgaben zusammen, mit diesem Deckblatt als erster Seite. (Die Klausuraufsicht hilft beim Klammern; die Verantwortung für die Vollständigkeit der eingereichten Klausur liegt jedoch bei Ihnen.) Der Aufgabenzettel muss nicht abgegeben werden. Bitte schreiben Sie auch keine Lösungen auf den Aufgabenzettel. **b.w.**

Es gibt keine Punkte auf richtiges Rechnen mit falschem Ansatz! **Hinreichend zum Bestehen der Klausur sind 20 Punkte.** Empfehlungen: Planen Sie Ihre Zeit so, dass Sie bei jeder Aufgabe die **Teilaufgaben a) und b)** bearbeiten, denn diese ersten Teilaufgaben sind in der Regel einfach. Lesen Sie unbedingt vor der Bearbeitung der Aufgaben die **Formelsammlung** am Ende durch, damit Sie auf die richtigen Ideen kommen. Sie dürfen sich ohne Beweis auf diese Formeln beziehen.

Aufgabe 1: Erhaltungssätze (10 Punkte)
Ein Teilchen bewegt sich unter dem Einfluss eines zeitunabhängigen (und für jedes $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ definierten) Kraftfeldes $\vec{F}(\vec{r})$. Es ist $r = |\vec{r}|$.

a) (5 Punkte) Geben Sie für jeden der folgenden Spezialfälle an, ob Impuls, Energie und/oder Drehimpuls erhalten sind. Sie müssen Ihre Angabe weder beweisen noch Gegenbeispiele angeben.

i) $\vec{F} = 0$, ii) $\vec{r} \times \vec{F} = 0$, iii) $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$, iv) $\vec{F} = F(r)\frac{\vec{r}}{r}$,

v) Es gibt eine Funktion $V(\vec{r})$, so dass $\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$.

b) (4 Punkte) Bestimmen Sie für die folgenden konservativen Kräfte das Potenzial ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

i) $\vec{F}(\vec{r}) = -\alpha \frac{\vec{r}}{r^3}$, ii) $\vec{F}(\vec{r}) = -\alpha e^{-\beta r} \frac{\vec{r}}{r}$.

Hinweis: Es ist erlaubt, das Potenzial zu erraten und dann zu zeigen, dass es zur angegebenen Kraft gehört.

c) (1 Punkt) Ist bei den Kräften aus Teilaufgabe b) der Drehimpuls erhalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2: Scheinkräfte (10 Punkte)
Betrachten Sie eine Scheibe, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotiert, $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$. Im mit der Scheibe rotierenden Bezugssystem erfährt ein Massenpunkt am Ort $\vec{r}$ die Zentrifugalbeschleunigung $\vec{a}_Z = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ und die Coriolisbeschleunigung $\vec{a}_C = -2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$. In Zylinderkoordinaten (mit Einheitsvektoren $\vec{e}_z$, $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\phi$) ist $\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$. Dabei ist $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) (1 Punkt) Drücken Sie $\dot{\vec{r}}$ durch $\dot{z}$, $\dot{\rho}$, ρ und $\dot{\phi}$ sowie $\vec{e}_z$, $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\phi$ aus.

b) (1 Punkt) Berechnen Sie $\vec{a}_C$ in Zylinderkoordinaten.

c) (2 Punkte) Berechnen Sie $\vec{a}_Z$ in Zylinderkoordinaten.

d) (2 Punkte) Wir betrachten nun eine Bewegung des Massenpunktes auf der Scheibe (also mit $z = 0$ und $\dot{z} = 0$) für den Fall $|\dot{\phi}| \ll \omega$. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\ddot{\rho} = \rho \omega^2 \qquad \rho \ddot{\phi} = -2\omega \dot{\rho} \tag{1}$$

Bestimmen Sie $\rho(t)$ für die Anfangsbedingung $\rho(0) = \rho_0 > 0$, $\dot{\rho}(0) = 0$.

e) (2 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe Ihrer Lösung für $\rho(t)$ nun $\dot{\phi}(t)$ aus Gl. (1). Die Anfangsbedingung ist $\dot{\phi}(0) = 0$.

f) (2 Punkte) Entwickeln Sie Ihr Ergebnis für $\dot{\phi}(t)$ bis zur ersten nichtverschwindenden Ordnung in t. Integrieren Sie das entwickelte Ergebnis, um $\phi(t)$ zur Anfangsbedingung $\phi(0) = 0$ zu bestimmen.

Aufgabe 3: Kepler-Problem (10 Punkte)
Ein Asteroid mit Masse m umkreise die Sonne auf einer elliptischen Bahn. Die Bahnkurve ist in ebenen Polarkoordinaten r,θ durch

$$r(\theta) = \frac{l^2}{\mu\alpha(1 + \epsilon \cos\theta)}$$

gegeben, wobei μ die reduzierte Masse und l den Betrag des Drehimpulses bezeichnet. Die potentielle Energie ist $U(r) = -\alpha/r$ mit $\alpha > 0$. Die kartesischen Koordinaten sind gegeben durch $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

a) (2 Punkte) Drücken Sie μ durch m und die Sonnenmasse M aus. Entwickeln Sie μ zur ersten Ordnung in m/M.

b) (3 Punkte) Skizzieren Sie die Umlaufbahn des Asteroiden. Tragen Sie die Position der Sonne sowie die große und kleine Halbachse der Umlaufbahn ein.

c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Länge a der großen Halbachse. Drücken Sie a durch μ, α, l und ϵ aus.

d) (3 Punkte) Berechnen Sie den Betrag v_1 der Geschwindigkeit des Asteroiden am sonnennächsten Punkt. Drücken Sie v_1 durch μ, α, l und ϵ aus.
Hinweis: Welchen Winkel schließen $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ an diesem Punkt ein?

Aufgabe 4: Geladenes Teilchen im Magnetfeld (10 Punkte):
Die Bewegung eines Massenpunktes mit $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ werde durch die Differentialgleichungen

$$\ddot{x} = \omega \dot{y}, \qquad \ddot{y} = -\omega \dot{x}, \qquad \ddot{z} = 0,$$

mit $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$ bestimmt.

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie $z(t)$. Drücken Sie Ihr Ergebnis durch $z_0 := z(0)$ und $v_{0z} := \dot{z}(0)$ aus.

b) (2 Punkte) Integrieren Sie die erste Gleichung über die Zeit, um eine Gleichung für $\dot{x}$ zu erhalten. Vergessen Sie die Integrationskonstante nicht!

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie $y(t)$, ausgedrückt durch $v_{0y} := \dot{y}(0)$, $y_0 := y(0)$ und die Integrationskonstante aus Teilaufgabe b).
Hinweis: Sie dürfen die Lösung erraten und durch Einsetzen zeigen, dass sie die Differentialgleichung für y erfüllt.

d) (2 Punkte) Bestimmen Sie $x(t)$, ausgedrückt durch $v_{0x} := \dot{x}(0)$ und $x_0 := x(0)$.

e) (2 Punkte) Bestimmen Sie $|\dot{\vec{r}}|$ und geben Sie den Weg an, den der Massenpunkt im Zeitintervall $[0, T]$ zurücklegt.

Aufgabe 5: Stokes'sche Reibung (10 Punkte):
Ein Teilchen bewegt sich unter dem Einfluss der Gewichtskraft und einer Stokes'schen Reibungskraft, d.h. $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ erfüllt

$$\dot{\vec{v}} = -g\vec{e}_z - \alpha\vec{v}, \qquad \alpha, g > 0.$$

Wir betrachten eine Bewegung in der x–z–Ebene, d.h. $y = v_y = 0$.

a) (1 Punkt) Bestimmen Sie $v_x(t)$, ausgedrückt durch $v_{0x} = v_x(0)$. Betrachten Sie nur den Fall $v_{0x} \geq 0$.

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie $v_z(t)$, ausgedrückt durch $v_{0z} = v_z(0)$. Betrachten Sie nur den Fall $v_z(t) \geq -\frac{g}{\alpha}$. Achten Sie darauf, dass das Argument des Logarithmus' dimensionslos und positiv ist.

c) (1 Punkt) Bestimmen Sie $x(t)$ für den Fall $x(0) = 0$, ausgedrückt durch v_{0x}.

d) (2 Punkte) Bestimmen Sie $z(t)$, ausgedrückt durch v_{0z} und $z_0 = z(0) \geq 0$.

e) (2 Punkte) Betrachten Sie den Fall $v_{0z} > 0$. Bestimmen Sie den Zeitpunkt T, für den das Teilchen die maximale Höhe $z_{\max}$ der Bahnkurve erreicht.

f) (2 Punkte) Für $v_{0z} = 0$ und $\alpha t \gg 1$ beobachtet man experimentell das asymptotische Verhalten

$$z(t) = -0,3\frac{m}{s}\,t \;+\; 9,0 \cdot 10^{-3} m \;+\; z_0.$$

Bestimmen Sie daraus (auf zwei signifikante Stellen) α und g.

Formelsammlung

A: $$\vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r}.$$

B: $$\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_z, \qquad \vec{e}_\phi \times \vec{e}_z = \vec{e}_\rho, \qquad \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = \vec{e}_\phi.$$

C: $$\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\phi}\vec{e}_\phi, \quad \dot{\vec{e}}_\phi = -\dot{\phi}\vec{e}_\rho.$$

D: $$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x.$$

E: Taylor-Entwicklungen: $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots, \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots,$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots$$

F: $$\vec{l} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

Nächste Termine: Konsultieren Sie die Webseite der Vorlesung (`http://www.ttp.kit.edu/~stschacht/theoa.htm`) für

- Termin und Ort der **Klausureinsicht** (voraussichtlich am 17. April ab 15.45 h im Gaede HS) und
- die Termine der **mündlichen Prüfungen** der Studierenden, die zweimal die schriftliche Prüfung nicht bestanden haben. Diese Prüfungen werden im Raum 11/14 stattfinden.