Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I

WS 2014

Karlsruhe Institute of Technology

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. M. Spinrath, Dr. S. Schacht

Erste Klausur
Abgabe: 24.2.2015

Vorname:

Familienname:

E-Mail-Adresse:

Matrikelnummer: 1 **Tutorgruppe:**

Studienfach:

Versuch: erster zweiter

A1 (10 Punkte)	a)(5P)	b)(5P)			
A2 (10 Punkte)	a)(2P)	b)(2P)	c)(4P)	d)(2P)	
A3 (10 Punkte)	a)(2P)	b)(3P)	c)(3P)	d)(2P)	
A4 (10 Punkte)	a)(2P)	b)(2P)	c)(2P)	d)(2P)	e)(2P)
A5 (10 Punkte)	a)(4P)	b)(2P)	c)(2P)	d)(2P)	
Σ (50 Punkte)					

Lesen Sie den folgenden Text zu Beginn der Klausur bitte sorgfältig durch!
Bitte schreiben Sie oben in jedes Kästchen maximal einen Buchstaben oder eine Ziffer. Schreiben Sie nichts in die Punktetabelle, sie dient der Korrektur. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer und nummerieren Sie Ihre Blätter fortlaufend durch. Was nicht bewertet werden soll, ist deutlich durchzustreichen. Bitte kennzeichnen Sie die Endergebnisse der Teilaufgaben deutlich, z.B. durch doppeltes Unterstreichen. Wenn Sie mehr Papier brauchen, heben Sie bitte die Hand.
Legen Sie bitte zu Beginn der Klausur Ihre Studentenausweise neben sich auf den Tisch; sie werden während der Klausur kontrolliert. Wer seinen Studentenausweis vergessen hat, verwendet einen anderen Lichtbildausweis.
Die Benutzung elektronischer Geräte (Taschenrechner, Mobiltelefone, Tablet-Computer,...) oder anderer Hilfsmittel (Fachbücher, Aufzeichnungen, ältere Geschwister...) ist nicht gestattet.
Wer zur Toilette geht, gibt das Aufgabenblatt und seine Lösungen beim Aufsichtspersonal ab und erhält alles anschließend zurück. Es ist erlaubt, die bearbeitete Klausur vor Ablauf der Bearbeitungszeit von 2 Zeitstunden abzugeben und den Raum zu verlassen. Jedoch: In den letzten 20 Minuten der Bearbeitungszeit darf niemand mehr den Raum verlassen!
Heften Sie die Blätter mit Ihren Lösungen der Klausuraufgaben zusammen, mit diesem Deckblatt als erster Seite. (Die Klausuraufsicht hilft beim Klammern; die Verantwortung für die Vollständigkeit der eingereichten Klausur liegt jedoch bei Ihnen.) Der Aufgabenzettel muss nicht abgegeben werden. Bitte schreiben Sie auch keine Lösungen auf den Aufgabenzettel. **b.w.**

Es gibt keine Punkte auf richtiges Rechnen mit falschem Ansatz! **Hinreichend zum Bestehen der Klausur sind 20 Punkte.** Empfehlungen: Planen Sie Ihre Zeit so, dass Sie bei jeder Aufgabe die **Teilaufgaben a) und b)** bearbeiten, denn diese ersten Teilaufgaben sind in der Regel einfach. Lesen Sie unbedingt vor der Bearbeitung der Aufgaben die **Formelsammlung** am Ende durch, damit Sie auf die richtigen Ideen kommen. Sie dürfen sich ohne Beweis auf diese Formeln beziehen.

Aufgabe 1: Drehungen im $\mathbb{R}^3$ (10 Punkte)
$R = R(\vec{\phi})$ bezeichne die Matrix einer Drehung um die Achse $\vec{n} = \vec{\phi}/\phi$ mit dem Winkel $\phi \neq 0$.

a) (5 Punkte) Welche der folgenden Eigenschaften ist (für beliebiges $\vec{\phi} \neq 0$) erfüllt?

i) $R^T R = \mathbb{1}$, ii) $R(-\vec{\phi}) = R(\vec{\phi})^{-1}$, iii) $R(\vec{\phi})\vec{\phi} = \vec{\phi}$, iv) $\det R = 1$,
v) Die Spalten $\vec{r}^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, erfüllen $\vec{r}^{(j)} \cdot \vec{r}^{(k)} = \delta_{jk}$.

Geben Sie bei jeder Eigenschaft an, ob sie richtig oder falsch ist. Ein Beweis oder Gegenbeispiel ist nicht erforderlich.

b) (5 Punkte) Betrachten Sie die Drehmatrix

$$R(\vec{\phi} = \phi\vec{n}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie $\phi \in [0, \pi]$. (2 Punkte)

ii) Bestimmen Sie $\pm\vec{n}$. (Auf die Orientierung von $\vec{n}$ kommt es hier nicht an.) (2 Punkte)

iii) Bestimmen Sie das Vorzeichen von $\vec{n}$ so, dass mit $\vec{e}_x = (1, 0, 0)^T$ die Ungleichung $\left[(R(\vec{\phi})\vec{e}_x) \times \vec{e}_x\right] \cdot \vec{n} > 0$ erfüllt ist. (1 Punkt)

Aufgabe 2: Zweikörperproblem (10 Punkte)
Ein Teilchen mit Masse m_2 am Ort $\vec{r}_2$ übe auf ein anderes Teilchen mit Masse m_1 am Ort $\vec{r}_1$ die Kraft $\vec{F}_{21}(\vec{r})$ aus, wobei $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ist. Die Gegenkraft sei $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Es sei

$$\vec{F}_{21}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) \qquad \text{mit} \quad U(\vec{r}) = \frac{k}{2}\vec{r}^{\,2} \tag{1}$$

und zeitunabhängigem $k > 0$. Damit ist

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) \qquad \text{mit} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{2}$$

a) (2 Punkte) Ist die Energie erhalten? Ist der Drehimpuls erhalten? Begründen Sie Ihre Antwort in jeweils <u>einem</u> Satz.

b) (2 Punkte) Berechnen Sie $\vec{\nabla}U(\vec{r})$ und geben Sie die Bewegungsgleichung in Gl. (2) für $\vec{r} = (x, y, z)^T$ an.

c) (4 Punkte) Bestimmen Sie $\vec{r}(t)$. Drücken Sie Ihr Ergebnis durch $\vec{r}_0 = \vec{r}(0)$ und $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}(0)$ aus.

d) (2 Punkte) Bestimmen Sie $\vec{l} = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ für die Lösung aus Teilaufgabe c).

Aufgabe 3: Corioliskraft (10 Punkte)
Der Ort $\vec{r}$ eines Fahrzeugs sei durch die Kugelkoordinaten r, θ, ϕ bestimmt. Das Flugzeug fahre auf der Nordhalbkugel der Erde mit Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}} = v_{\text{Süd}}\vec{e}_\theta + v_{\text{Ost}}\vec{e}_\phi$. Die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation ist $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$.

a) (2 Punkte) Beweisen Sie die Beziehung

$$\vec{e}_z = \vec{e}_r \cos\theta - \vec{e}_\theta \sin\theta. \tag{3}$$

b) (3 Punkte) Berechnen Sie die Coriolisbeschleunigung

$$\vec{a}_C = -\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}, \tag{4}$$

die auf das Fahrzeug wirkt. Geben Sie Ihr Ergebnis in Kugelkoordinaten, also in der Form $\vec{a}_C = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta + a_\phi \vec{e}_\phi$ an.

c) (3 Punkte) Betrachten Sie den Fall, dass das Fahrzeug sich nach Süden bewegt. Durch die Coriolisbeschleunigung wird es in West-Ost-Richtung abgelenkt. Berechnen Sie $v_{\text{Ost}}(t)$, wobei Sie $v_{\text{Süd}}$, θ und $\vec{e}_{r,\theta,\phi}$ als zeitlich konstant annehmen dürfen. Berechnen Sie $s(t) = \int_0^t dt' v_{\text{Ost}}(t')$. Wird das Fahrzeug nach Westen oder Osten abgelenkt?

d) (2 Punkte) Betrachten Sie das Zahlenbeispiel mit $v_{\text{Süd}} = 40\frac{m}{s}$, $\theta = 45°$ und $\omega = \frac{3}{4} \cdot 10^{-4} \frac{1}{s}$: Wie groß ist $s(t)$ für $t = 60\,s$, d.h. wie weit kommt das Fahrzeug in einer Minute aus der Spur? Es reicht aus, wenn Sie das Ergebnis auf zwei signifikante Stellen angeben.

Aufgabe 4: Geladenes Teilchen im Magnetfeld (10 Punkte):
Die Bewegung eines Massenpunktes mit $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ werde durch die Differentialgleichungen

$$\ddot{x} = \omega \dot{y}, \qquad \ddot{y} = -\omega \dot{x}, \qquad \ddot{z} = 0,$$

mit $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$ bestimmt.

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie $z(t)$. Drücken Sie Ihr Ergebnis durch $z_0 := z(0)$ und $v_{0z} := \dot{z}(0)$ aus.

b) (2 Punkte) Integrieren Sie die erste Gleichung über die Zeit, um eine Gleichung für $\dot{x}$ zu erhalten. Vergessen Sie die Integrationskonstante nicht!

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie $y(t)$, ausgedrückt durch $v_{0y} := \dot{y}(0)$, $y_0 := y(0)$ und die Integrationskonstante aus Teilaufgabe b).
Hinweis: Sie dürfen die Lösung erraten und durch Einsetzen zeigen, dass sie die Differentialgleichung für y erfüllt.

d) (2 Punkte) Bestimmen Sie $x(t)$, ausgedrückt durch $v_{0x} := \dot{x}(0)$ und $x_0 := x(0)$.

e) (2 Punkte) Bestimmen Sie $|\dot{\vec{r}}|$ und geben Sie den Weg an, den der Massenpunkt im Zeitintervall $[0, T]$ zurücklegt.

Aufgabe 5: Newtonsche Reibung (10 Punkte)
v sei die z-Komponente der Geschwindigkeit einer fallenden Münze, auf die die Gewichtskraft und eine Reibungkraft wirken.

a) (4 Punkte) Bestimmen Sie $v(t)$ aus der Bewegungsgleichung

$$\dot{v} \;=\; -g + \alpha v^2, \qquad \alpha, g > 0, \tag{5}$$

wobei wir uns auf den Fall $-\sqrt{\frac{g}{\alpha}} < v < 0$ beschränken. Wählen Sie als Integrationskonstante den Zeitpunkt t_0, für den $v(t_0) = 0$ gilt.
Hinweis: Achten Sie darauf, dass das Argument des Logarithmus positiv ist.

b) (2 Punkte) Für $t \to \infty$ konvergiert $v(t)$ gegen eine Grenzgeschwindigkeit v_G. Bestimmen Sie v_G.

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie $z(t)$ für die Anfangsbedingung $z(0) = h$, $v(0) = 0$.

d) (2 Punkte) Betrachten Sie den Fall $\sqrt{\alpha g}\, t \gg 1$ und bestimmen Sie die Zeit t, zu der die Münze für $g = 10\frac{m}{s^2}$, $h = 100\, m$, $\alpha = 0,1\frac{1}{m}$ bei $z = 0$ angekommen ist.

Formelsammlung

A:

ϕ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos\phi$	1	$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

B: $$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\, \cos\phi \\ \sin\theta\, \sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\, \cos\phi \\ \cos\theta\, \sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

C: $$\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\phi, \qquad \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_r, \qquad \vec{e}_\phi \times \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$$

D: $$\mathrm{tr}\, R(\vec{\phi}) = 1 + 2\cos\phi$$

E: $$\left(R(\phi\vec{n}) - R^T(\phi\vec{n})\right)\vec{n} = 0.$$

F: Partialbruchzerlegung: $$\frac{1}{1-\beta x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\sqrt{\beta}x} + \frac{1}{1+\sqrt{\beta}x}\right]$$

G: Eine Stammfunktion: $$\frac{2}{1+e^{-\gamma t}} = \frac{2e^{\gamma t}}{e^{\gamma t}+1} = \frac{2}{\gamma}\frac{d}{dt}\ln\left[1+e^{\gamma t}\right].$$

H: $$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707\ldots, \qquad \ln 2 = 0.69\ldots$$

Nächste Termine: Konsultieren Sie die Webseite der Vorlesung (`http://www.ttp.kit.edu/~stschacht/theoa.htm`) für

- Termin und Ort der **Klausureinsicht** (vorläufiger Termin: 2. März, von 16:30 - 19:00 Uhr im Seminarraum 6/1) und
- die Termine der **mündlichen Prüfungen** der Studierenden, die zweimal die schriftliche Prüfung nicht bestanden haben. Diese Prüfungen werden im Raum 11/14 stattfinden.