Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I

WS 2014

Übungsblatt 11
Abgabe: keine
Besprechung: Lösung wird online gestellt

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. M. Spinrath, Dr. S. Schacht

Dieses Blatt ist eine Übungsklausur, es ist nicht Teil der Vorleistung. Kontrollieren Sie die Zeit und notieren Sie sich, wie weit Sie in 2 Stunden gekommen sind. Wenn Sie mindestens die Hälfte der Punkte erzielt haben, hätten Sie die Klausur bestanden.
Richtiges Rechnen mit falschem Ansatz gibt keine Punkte.

Aufgabe 1: Drehungen im $\mathbb{R}^3$ (10 Punkte)
$R = R(\vec{\phi})$ bezeichne die Matrix einer Drehung um die Achse $\vec{n} = \vec{\phi}/\phi$ mit dem Winkel $\phi \neq 0$.

a) (5 Punkte) Welche der folgenden Eigenschaften ist (für beliebiges $\vec{\phi} \neq 0$) erfüllt?

i) $R^T R = \mathbb{1}$, ii) $R^T = R$, iii) $R(-\vec{\phi}) = R(\vec{\phi})^T$, iv) $\det R = 1$,
v) Die j-te Spalte steht senkrecht auf der j-ten Zeile für $j = 1, 2, 3$.

Geben Sie bei jeder Eigenschaft an, ob sie richtig oder falsch ist. Ein Beweis oder Gegenbeispiel ist nicht erforderlich.

b) (1 Punkt) Beweisen Sie $\left(R - R^T\right) \vec{n} = 0$.

c) (4 Punkte) Betrachten Sie die Drehmatrix

$$R(\vec{\phi} = \phi\vec{n}) \;=\; \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie $\phi \in [0, \pi]$. (1 Punkt)

ii) Bestimmen Sie $\pm\vec{n}$. (Auf die Orientierung von $\vec{n}$ kommt es hier nicht an.) (2 Punkte)

iii) Bestimmen Sie das Vorzeichen von $\vec{n}$ so, dass mit $\vec{e}_x = (1, 0, 0)^T$ die Ungleichung $(R(\vec{\phi})\vec{e}_x \times \vec{e}_x) \cdot \vec{n} > 0$ erfüllt ist. (1 Punkt)

Aufgabe 2: Stokes'sche Reibung (10 Punkte)
v sei die z-Komponente der Geschwindigkeit eines Teilchens, auf das die Gewichtskraft und eine Reibungkraft wirken.

a) (4 Punkte) Bestimmen Sie $v(t)$ aus der Bewegungsgleichung

$$\dot{v} \;=\; -g - \alpha v, \qquad \alpha, g > 0, \tag{1}$$

wobei Sie sich auf Lösungen mit $v > -\dfrac{g}{\alpha}$ beschränken dürfen. Wählen Sie als Integrationskonstante den Zeitpunkt t_0, für den $v(t_0) = 0$ gilt.
Hinweis: Achten Sie darauf, dass das Argument des Logarithmus positiv ist.

b) (2 Punkte) Für $t \to \infty$ konvergiert $v(t)$ gegen eine Grenzgeschwindigkeit v_G. Bestimmen Sie v_G.
Hinweis: Diese Frage können Sie auch beantworten, wenn Sie Teilaufgabe a) nicht gelöst haben.

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie $z(t)$ für die Anfangsbedingung $z(0) = h$, $v(0) = 0$.

d) (2 Punkte) Betrachten Sie den Fall $\alpha t \gg 1$ und bestimmen Sie die Zeit t, zu der das Teilchen für $g = 10\frac{m}{s^2}$, $h = 0,1\,m$, $\alpha = 10^3\frac{1}{s}$ bei $z = 0$ angekommen ist.

Aufgabe 3: Schraubenlinie (10 Punkte)
Auf ein Teilchen mit Masse m wirke die Kraft

$$\vec{F} = q\,\dot{\vec{r}} \times \vec{B}, \qquad \vec{B} = B\vec{e}_z \quad \text{mit zeitunabhängigen } q, B > 0. \tag{2}$$

a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \\ v_0 t \end{pmatrix}, \qquad R, \omega, v_0 > 0. \tag{3}$$

die Newtonschen Bewegungsgleichungen erfüllt, und drücken Sie ω durch q, B und m aus.

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie $v(t) = |\dot{\vec{r}}(t)|$.

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie den zurückgelegten Weg $s(t) = \int_0^t dt' v(t')$ und invertieren Sie das Ergebnis, um $t(s)$ zu bestimmen.

d) (2 Punkte) Bestimmen Sie $\vec{\tilde{r}}(s) := \vec{r}(t(s))$ und berechnen Sie den Tangentenvektor $\vec{t}(s) = \frac{d\vec{\tilde{r}}(s)}{ds}$.

Aufgabe 4: Coriolis- und Zentrifugalkraft (10 Punkte)
Der Ort $\vec{r}$ eines Flugzeugs sei durch die Kugelkoordinaten r, θ, ϕ bestimmt. Das Flugzeug fliege mit Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}} = v_{\text{Süd}}\vec{e}_\theta + v_{\text{Ost}}\vec{e}_\phi$. Die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation ist $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$.

a) (2 Punkte) Beweisen Sie die Beziehung

$$\vec{e}_z = \vec{e}_r \cos\theta - \vec{e}_\theta \sin\theta. \tag{4}$$

b) (3 Punkte) Berechnen Sie die Coriolisbeschleunigung

$$\vec{a}_C = -\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}, \tag{5}$$

die auf das Flugzeug wirkt. Geben Sie Ihr Ergebnis in Kugelkoordinaten, also in der Form $\vec{a}_C = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_\phi\vec{e}_\phi$ an.

c) (3 Punkte) Berechnen Sie analog die Zentrifugalbeschleunigung

$$\vec{a}_Z = -\vec{\omega} \times (\omega \times \vec{r}). \tag{6}$$

d) (2 Punkte) Betrachten Sie das Zahlenbeispiel mit $v_{\text{Süd}} = 0$, $v_{\text{Ost}} = 250\frac{m}{s}$, $\theta = 45°$, $r = 6,4 \cdot 10^6 m$ und $\omega = \frac{3}{4} \cdot 10^{-4}\frac{1}{s}$: Wie groß sind die Südkomponenten $\vec{e}_\theta \cdot \vec{a}_c$ und $\vec{e}_\theta \cdot \vec{a}_Z$? Es reicht aus, wenn Sie das Ergebnis auf zwei signifikante Stellen angeben.

Aufgabe 5: Kepler-Problem (10 Punkte)
Ein Asteroid mit Masse m umkreise die Sonne auf einer elliptischen Bahn. Die Bahnkurve ist in ebenen Polarkoordinaten r,θ durch

$$r(\theta) = \frac{l^2}{\mu\alpha(1 + \epsilon\cos\theta)}$$

gegeben, wobei μ die reduzierte Masse und l den Betrag des Drehimpulses bezeichnet. Die potentielle Energie ist $U(r) = -\alpha/r$ mit $\alpha > 0$. Die kartesischen Koordinaten sind gegeben durch $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

a) (2 Punkte) Drücken Sie μ durch m und die Sonnenmasse M aus. Entwickeln Sie μ zur ersten Ordnung in m/M.

b) (3 Punkte) Skizzieren Sie die Umlaufbahn des Asteroiden. Tragen Sie die Position der Sonne sowie die große und kleine Halbachse der Umlaufbahn ein.

c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Länge a der großen Halbachse. Drücken Sie a durch μ, α, l und ϵ aus.

d) (3 Punkte) Berechnen Sie den Betrag v_1 der Geschwindigkeit des Asteroiden am sonnennächsten Punkt. Drücken Sie v_1 durch μ, α, l und ϵ aus.
Hinweis: Welchen Winkel schließen $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ an diesem Punkt ein?

Formelsammlung

A:

ϕ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos\phi$	1	$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

B: $$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\,\cos\phi \\ \sin\theta\,\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\,\cos\phi \\ \cos\theta\,\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

C: $$\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\phi, \qquad \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_r, \qquad \vec{e}_\phi \times \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$$

D: $$\vec{l} = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

E: $$\mathrm{tr}\, R(\vec{\phi}) = 1 + 2\cos\phi$$

F: Geometrische Reihe: $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$