Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I

WS 2014

Übungsblatt 10
Abgabe: 6.2.2015
Besprechung: 13.2.2015

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. M. Spinrath, Dr. S. Schacht

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer auf jedes Blatt ihrer Lösung und geben Sie auf der ersten Seite Ihre Tutorgruppe (Ort, Zeit, Name des Tutors) an.

Aufgabe 19: Wurf

Ein Handballspieler möchte einen Handball möglichst weit in südliche Richtung werfen. Die Anfangsgeschwindigkeit des Balls wird mit $\vec{v}_a$ bezeichnet, der Betrag der Anfangsgeschwindigkeit mit v_a.

a) (1 Punkt) Bestimmen Sie zunächst für einen allgemeinen Anstellwinkel θ die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ des Balls für einen Wurf nach Süden. Vernachlässigen Sie zunächst die Corioliskraft und die Zentrifugalkraft. Wählen Sie die z-Achse vertikal nach oben und die x-Achse in Richtung des Längengrads zum Nordpol. θ ist der Winkel zwischen der x-Achse und der Wurfrichtung. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Ball am Ort $\vec{r}(0) = (0, 0, 0)$. Die Beschleunigung sei konstant $\vec{a} = (0, 0, -g)$.

b) (1 Punkt) Berechnen Sie den Zeitpunkt T und den Abstand X, bei dem der Ball wieder am Boden auftrifft. Bei welchem Winkel θ wird der Abstand X maximal, falls v_a und g fest vorgegeben sind?

c) (2 Punkte) Betrachten Sie nun die Corioliskraft $\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}$ als Störung zu obigem Wurf. Berechnen Sie nun den Korrekturterm zu obiger Bahnkurve.
Hinweis: Sie dürfen dazu $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ aus **a)** *in $\vec{F}_C$ einsetzen.*

d) (1 Punkt) Der Handballspieler befinde sich in Turin (45° N), seine Wurfgeschwindigkeit beträgt 50 m/s, der Handball wiegt 450 g, die Erdrotation beträgt $|\vec{\omega}| \sim 3/4 \cdot 10^{-4}$ s^{-1} und der Erdbeschleunigung $|g| \sim 10$ m/s^2. Der Handballspieler verwende den in **b)** berechneten Anstellwinkel. Berechnen Sie, wie weit der Ball in y-Richtung abgelenkt wird.

Aufgabe 20: Kraftfelder

In dieser Aufgabe wollen wir die beiden Kraftfelder ($a > 0$)

$$\vec{F}_1(x,y) = a \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \quad \vec{F}_2(x,y) = \frac{a}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

untersuchen.

a) (1 Punkte) Zeichnen Sie die beiden Kraftfelder in der x-y Ebene und berechnen Sie $\vec{\nabla} \times \vec{F}_1$ und $\vec{\nabla} \times \vec{F}_2$.

b) (1 Punkt) Berechnen Sie nun die geleistete Arbeit, wenn sie einen geschlossenen rechteckigen Weg zurücklegen, das heißt, berechnen Sie

$$A_i = \oint \vec{F}_i(x,y) \cdot \mathrm{d}\,\vec{s} = \int_1^3 \vec{F}_i(x,-1)\vec{e}_x \,\mathrm{d}\,x + \int_{-1}^1 \vec{F}_i(3,y)\vec{e}_y \,\mathrm{d}\,y$$
$$+ \int_3^1 \vec{F}_i(x,1)\vec{e}_x \,\mathrm{d}\,x + \int_1^{-1} \vec{F}_i(1,y)\vec{e}_y \,\mathrm{d}\,y \;.$$

Hinweise: Es ist $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$ *für* $x > 0$.
Die obige Gestalt des Kurvenintegrals erhält man durch die Parametrisierungen

$$\vec{s}(x) = (x, 0, 0)^T \,, \qquad \textit{bzw.} \qquad \vec{s}(y) = (0, y, 0)^T \tag{1}$$

mit x, y in den entsprechenden Grenzen und dem Einsetzen von $\frac{d\vec{s}}{dx}dx$ bzw. $\frac{d\vec{s}}{dy}dy$ in das Kurvenintegral.

c) (1 Punkt) Wiederholen Sie nun die Rechnung für den Fall, dass der Weg den Ursprung enthält, also

$$B_i = \oint \vec{F}_i(x,y) \cdot \mathrm{d}\,\vec{s} = \int_{-1}^1 \vec{F}_i(x,-1)\vec{e}_x \,\mathrm{d}\,x + \int_{-1}^1 \vec{F}_i(1,y)\vec{e}_y \,\mathrm{d}\,y$$
$$+ \int_1^{-1} \vec{F}_i(x,1)\vec{e}_x \,\mathrm{d}\,x + \int_1^{-1} \vec{F}_i(-1,y)\vec{e}_y \,\mathrm{d}\,y \;.$$

d) (2 Punkte) Interpretieren Sie ihre Ergebnisse physikalisch. Was passiert im Ursprung? Und welche Ergebnisse würden Sie unter Anwendung des Satzes von Stokes erhalten?
Hinweis: Der Satz von Stokes besagt hier:

$$\oint \vec{F}_i(x,y) \cdot d\,\vec{s} = \iint_A (\vec{\nabla} \times \vec{F}_i)_z \,d\,x\,d\,y \;,$$

wobei A die eingeschlossene Fläche ist.

Aufgabe 21: Bonusaufgabe

a) (2 Bonuspunkte) Berechnen Sie für $\vec{F}_2$ aus Aufgabe 20 das Potenzial

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\,\vec{s}$$

in Zylinderkoordinaten ($\vec{F}_2 = a/\rho\,\vec{e}_\varphi$), wobei entlang eines Kreissegmentes mit

$$\mathrm{d}\,\vec{s} = \rho(\varphi - \varphi_0)\vec{e}_\varphi \mathrm{d}\,\sigma \tag{2}$$

$\sigma \in [0,1]$integriert wird. Wie ändert sich das Potential, wenn das Wegelement $\mathrm{d}\,\vec{s}$ auch in andere Richtungen als $\vec{e}_\varphi$ zeigt?

b) (1 Bonuspunkt) Berechnen Sie $-\vec{\nabla}V$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit $\vec{F}_2$.
Hinweis: Der Gradient in Zylinderkoordinaten lautet: $\vec{\nabla} = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial\rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$

c) (2 Bonuspunkte) Ist V eine stetige Funktion des Azimutwinkels φ? Welche Eigenschaft muss ein kreissegmentförmiger Weg $\mathcal{E}$ (mit $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ und $\rho = z =$ konstant) haben, damit die Arbeit

$$W = \rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \vec{F}_2 \cdot \vec{e}_\varphi \mathrm{d}\,\varphi$$

durch die Differenz der Potenziale am Anfangs- und Endpunkt gegeben ist?