Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I
WS 2014

Übungsblatt 8
Abgabe: 16.1.2015
Besprechung: 23.1.2015

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. M. Spinrath, Dr. S. Schacht

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Matrikelnummer auf jedes Blatt ihrer Lösung und geben Sie auf der ersten Seite Ihre Tutorgruppe (Ort, Zeit, Name des Tutors) an.

Aufgabe 15: Spaß mit Indizes

a) (1.5 Punkte) Berechnen Sie

$$\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij}\epsilon_{jkl}\ ,\ \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij}\epsilon_{ijk}\ ,\ \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij}\delta_{ji}\ .$$

b) (1 Punkt) Zeigen Sie durch geschicktes Argumentieren, dass für $j_1, j_2, j_3, k_1, k_2, k_3 \in \{1,2,3\}$ gilt:

$$\begin{aligned}\epsilon_{j_1j_2j_3}\epsilon_{k_1k_2k_3} = \quad & \delta_{j_1k_1}\delta_{j_2k_2}\delta_{j_3k_3} + \delta_{j_1k_2}\delta_{j_2k_3}\delta_{j_3k_1} + \delta_{j_1k_3}\delta_{j_2k_1}\delta_{j_3k_2} \\ & - \delta_{j_1k_2}\delta_{j_2k_1}\delta_{j_3k_3} - \delta_{j_1k_3}\delta_{j_2k_2}\delta_{j_3k_1} - \delta_{j_1k_1}\delta_{j_2k_3}\delta_{j_3k_2}\ .\end{aligned}$$

c) (1.5 Punkte) Berechnen Sie

$$\sum_{l=1}^{3} \epsilon_{j_1j_2l}\epsilon_{k_1k_2l}\ ,\ \sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} \epsilon_{j_1lm}\epsilon_{k_1lm}\ ,\ \sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} \epsilon_{lmn}\epsilon_{lmn}\ .$$

d) (1 Punkt) Das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{v}$ kann in Komponentenform als

$$v_i = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

geschrieben werden. Berechnen Sie $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ und $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

Aufgabe 16: Drehungen im $\mathbb{R}^3$

Jede beliebige Drehung kann als Produkt aufeinanderfolgender Drehungen geschrieben werden. Als Standard wählt man eine Drehung um die z-Achse mit dem Winkel α, gefolgt von einer Drehung um die neue x-Achse mit dem Winkel β und abgeschlossen mit einer Drehung um die neue z-Achse mit dem Winkel γ. Die Winkel α, β und γ werden *Eulersche Winkel* genannt. Die assoziierte Drehmatrix ist

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Eine andere Beschreibung einer beliebigen Drehung haben Sie in Aufgabe 13 kennengelernt. Eine Drehung kann durch einen Vektor $\vec{\phi}$ mit $\phi \equiv |\vec{\phi}| = (\vec{\phi}\cdot\vec{\phi})^{1/2} \leq \pi$ beschrieben werden. Die assoziierte Drehmatrix ist $R'(\vec{\phi}) = \exp(\vec{\phi}\cdot\vec{\omega})$ mit $\vec{\phi}\cdot\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \phi_i \omega^{(i)}$ und Matrizen $\omega^{(i)}$ mit $\omega^{(i)}_{jk} = \epsilon_{ijk}$.

a) (0.5 Punkte) Bestimmen Sie die Komponenten der Matrix $R(\alpha,\beta,0)$.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie an jeweils einem Beispiel: Die Zeilenvektoren von $R(\alpha,\beta,0)$ haben die Länge 1 und stehen paarweise orthogonal aufeinander.

c) (1.5 Punkte)

$$(\vec{\phi}\cdot\vec{\omega})^2 = \vec{\phi}\vec{\phi}^T - \phi^2 \mathbb{1} \ , \ (\vec{\phi}\cdot\vec{\omega})^3 = -\phi^2(\vec{\phi}\cdot\vec{\omega}) \ , \ (\vec{\phi}\cdot\vec{\omega})^4 = -\phi^2(\vec{\phi}\cdot\vec{\omega})^2 \ .$$

Dabei bezeichnet $\vec{\phi}\vec{\phi}^T$ die Matrix mit $[\vec{\phi}\vec{\phi}^T]_{ij} = \phi_i\phi_j$.
Hinweis: Verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 15.

d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(\vec{\phi}\cdot\vec{\omega})^{2n+1} = (-1)^n \phi^{2n}(\vec{\phi}\cdot\vec{\omega}) \ , \ (\vec{\phi}\cdot\vec{\omega})^{2n+2} = (-1)^n \phi^{2n}(\vec{\phi}\vec{\phi}^T - \phi^2\mathbb{1}) \ .$$

e) (1 Punkt) Zeigen Sie

$$R'(\vec{\phi}) = \exp(\vec{\phi}\cdot\vec{\omega}) = \mathbb{1}\cos\phi + \vec{\phi}\vec{\phi}^T \frac{1-\cos\phi}{\phi^2} + (\vec{\phi}\cdot\vec{\omega})\frac{\sin\phi}{\phi}$$

indem Sie die Exponentialreihe geeignet aufteilen.