Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I

WS 2014

Übungsblatt 7

Prof. Dr. U. Nierste
Abgabe: 9.1.2015

Dr. M. Spinrath, Dr. S. Schacht
Besprechung: 16.1.2015

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt ihrer Lösung und geben Sie auf der ersten Seite Ihre Tutorgruppe (Ort, Zeit, Name des Tutors) an.

Aufgabe 13: Drehungen im dreidimensionalen Raum werden durch 3×3-Matrizen beschrieben:

$$\vec{r}\,' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}x + R_{12}y + R_{13}z \\ R_{21}x + R_{22}y + R_{23}z \\ R_{31}x + R_{32}y + R_{33}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R\vec{r}.$$

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Komponenten der Drehmatrizen $R_x(\phi)$, $R_y(\phi)$ und $R_z(\phi)$, die Drehungen des Koordinatensystems um die x, y bzw. z-Achse um den Winkel ϕ im mathematisch positiven Sinn (d.h. gegen den Uhrzeigersinn, wenn man in negativer Richtung der entsprechenden Achse blickt) beschreiben.

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Matrizen

$$\omega^{(1)} = \frac{d}{d\phi} R_x(\phi)\Big|_{\phi=0}, \qquad \omega^{(2)} = \frac{d}{d\phi} R_y(\phi)\Big|_{\phi=0}, \qquad \omega^{(3)} = \frac{d}{d\phi} R_z(\phi)\Big|_{\phi=0},$$

indem Sie die Komponenten der Matrizen $R_x(\phi)$, $R_y(\phi)$ und $R_z(\phi)$ nach ϕ differenzieren. Drücken Sie die Komponenten $\omega^{(i)}_{jk}$ der Matrizen $\omega^{(i)}$ durch das dreidimensionale Levi-Civita-Symbol ϵ_{ijk} aus. ϵ_{ijk} ist definiert durch $\epsilon_{123} = 1$, $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij}$ (Zyklizität) und $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$ (Antisymmetrie).

c) (1 Punkt) Berechnen Sie die Matrixprodukte $R_x(\phi_1)R_z(\phi_3)$ und $R_z(\phi_3)R_x(\phi_1)$. Welche Koordinatentransformationen werden durch die zwei Matrixprodukte beschrieben? Sind die Ergebnisse gleich? Entwickeln Sie die zwei Matrixprodukte um $\phi_1 = \phi_3 = 0$ zur ersten Ordnung in ϕ_1 und ϕ_3 und drücken Sie ihr Ergebnis durch die Matrizen $\omega^{(i)}$ aus. Vernachlässigen Sie dabei Terme der Ordnung $\phi_1\phi_3$.

Aufgabe 14: Sonnenauf- und -untergang: Wir betrachten zunächst ein kartesisches Koordinatensystem (X', Y, Z) mit Ursprung im Zentrum der Sonne. Wir idealisieren die Erdbahn als Kreis um diesen Ursprung, sie verlaufe in der (X', Y)-Ebene. Die X'-Achse ist dabei so gewählt, dass sie zu jedem Zeitpunkt den Erdmittelpunkt durchsticht. (Dieses Koordinatensystem dreht sich also im Jahresverlauf mit der Drehung der Erde um die Sonne einmal um den Ursprung.) Im nächsten Schritt verschieben wir mittels $X = X' - A$ das Koordinatenssystem um den Radius A der Erdumlaufbahn, so dass der Punkt $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$ dem Erdmittelpunkt entspricht. Die Blickrichtung von der Erde zur Sonne ist also $\vec{S} = (-1, 0, 0)$.

Die Erdachse in diesem Koordinatensystem ist

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} \sin\theta_0 \cos(\Omega T) \\ -\sin\theta_0 \sin(\Omega T) \\ \cos\theta_0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

wobei T die Zeit und $\Omega \simeq \frac{2\pi}{365{,}25\ \text{Tage}}$ die Kreisfrequenz des Erdumlaufs ist.
a) (2 Punkte) Zeichnen Sie die Position der Erde (in Bezug zur Sonne) für die Fälle i) $T = 0$ (Wintersonnenwende) und ii) $T = \frac{\pi}{2\Omega}$ (Frühlingsäquinoktium, Tagundnachtgleiche im Frühling). Zeichen Sie für beide Fälle die X- und Y-Achse und den Nordpol ein.

b) (2 Punkte) Betrachten Sie die Drehmatrix $D = D_2 D_1$ mit

$$D_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & 0 & -\sin\theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_0 & 0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix}, \qquad D_1 = \begin{pmatrix} \cos(\Omega T) & -\sin(\Omega T) & 0 \\ \sin(\Omega T) & \cos(\Omega T) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

und betrachten Sie das mit D gedrehte Koordinatensystem, $\vec{r} = D\vec{R}$, wobei $\vec{r} = (x, y, z)^T$ und $\vec{R} = (X, Y, Z)^T$ ist. Berechnen Sie $\vec{n} = D\vec{N}$ und bestätigen Sie, dass $\vec{n} = (0, 0, 1)^T$ ist, die z-Achse also mit der Erdachse übereinstimmt. Welche Bedeutung hat θ_0?

c) (1 Punkt) Berechnen Sie die Blickrichtung von der Erde zur Sonne im gedrehten Koordinatensystem: $\vec{s} = D\vec{S}$. (Da der Erdradius b sehr klein gegen A ist, dürfen wir annehmen, dass die Blickrichtung $\vec{s}$ von jedem Punkt der Erdkugel gleich ist.)

NB: Die folgenden Teilaufgaben geben Bonuspunkte. Das heißt man kann auf diesem Blatt bis zu 15 von 10 Punkten erreichen.

d) (2 Bonuspunkte) Ein Punkt auf der Erdoberfläche sei durch

$$\vec{r} = b \begin{pmatrix} \sin\theta \cos(\omega(t - t_0)) \\ \sin\theta \sin(\omega(t - t_0)) \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad b > 0 \tag{3}$$

gegeben. $90° - \theta$ ist die geographische Breite, $\omega = \frac{2\pi}{24\ \text{h}}$ ist die Kreisfrequenz der Erddrehung und t ist die Tageszeit. t_0 wird so bestimmt, dass $t = 0$ Mitternacht (Ortszeit) entspricht, und muss für die Berechnung dieser Teilaufgabe nicht bestimmt werden. Tagsüber ist $\vec{r} \cdot \vec{s} \geq 0$, nachts hingegen $\vec{r} \cdot \vec{s} \leq 0$. (Warum?). Am nördlichen Polarkreis ist am Tag der Wintersonnenwende die Bedingung $\vec{r} \cdot \vec{s} \geq 0$ zu genau einem Zeitpunkt t erfüllt. Der nördliche Polarkreis verläuft bei $66°33'55''$ nördlicher Breite. Bestimmen Sie aus dieser Information den Winkel θ_0.

e) (3 Bonuspunkte) Zunächst bestimmen Sie t_0 nun für die sogenannte mittlere Sonnenzeit aus der Bedingung, dass $\vec{r} \cdot \vec{s}$ für $t = 0$ und $\theta_0 = 0$ minimal wird. Betrachten Sie dann (für $\theta_0 \neq 0$) die Bedingung für Sonnenauf- bzw. -untergang, $\vec{r} \cdot \vec{s} = 0$. Da die Tage des frühesten Sonnenuntergangs bzw. des spätesten Sonnenaufgangs, die wir nun bestimmen wollen, in der Nähe der Wintersonnenwende liegen, dürfen wir die Näherungen aus Tabelle 1 zur Berechnung von $\vec{r} \cdot \vec{s}$ verwenden. (Beim Ausmultiplizieren von Produkten dürfen Sie Terme der Ordnung

Funktion	Näherung
$\sin(\Omega T)$	ΩT
$\cos(\Omega T)$	$1-(\Omega T)^2/2$
$\sqrt{a_0+a_1(\Omega T)+a_2(\Omega T)^2}$	$\sqrt{a_0}+a_1/(2\sqrt{a_0})(\Omega T)+(4a_0a_2-a_1^2)/(8\sqrt{a_0^3})(\Omega T)^2$
$1/(a_0+a_1(\Omega T)+a_2(\Omega T)^2)$	$1/a_0-a_1/a_0^2(\Omega T)-(a_0a_2-a_1^2)/a_0^3(\Omega T)^2$

Tabelle 1: Nützliche Näherungen für Aufgabe 14 e).

$(\Omega T)^3$ und höher weglassen.) Lösen Sie die Gleichung $\vec{r}\cdot\vec{s}=0$ mit diesen Näherungen nach $\cos(\omega t)$ auf. Die Lösung sollte nach Anwenden der Näherungen ein Polynom in (ΩT) sein. Den Tag des frühesten Sonnenuntergangs bzw. des spätesten Sonnenaufgangs findet man durch Lösen von $\frac{\partial(\vec{r}\cdot\vec{s})}{\partial T}=0$. Lösen Sie diese Gleichung nach T auf, wobei Sie Terme der Ordnung $(\Omega T)^2$ und höher vernachlässigen dürfen und die Lösung für $\cos(\omega t)$ nach dem Ableiten einsetzen. Welches Ergebnis finden Sie für die geographische Breite von Karlsruhe, 49° nördlicher Breite?

Ergänzender Hinweis für interessierte Studierende: Die Bedingung $\vec{r}\cdot\vec{s}=0$ definiert eine sog. *implizite Funktion* $t(T)$, die die Tageszeit t des Sonnenauf- bzw. -untergangs als Funktion der Jahreszeit T bestimmt. Über die Kettenregel findet man nun $0=\frac{d\vec{r}\cdot\vec{s}}{dT}=\frac{\partial\vec{r}\cdot\vec{s}}{\partial T}+\frac{\partial\vec{r}\cdot\vec{s}}{\partial t}\frac{dt}{dT}$. Uns interessieren die Extrema der Funktion $t(T)$, also die Lösungen von $\frac{dt}{dT}=0$. Die vorstehende Gleichung zeigt, dass wir dazu $\frac{\partial\vec{r}\cdot\vec{s}}{\partial T}=0$ lösen müssen, wobei zusätzlich $t(T)$ die Nebenbedingung $\vec{r}\cdot\vec{s}=0$ erfüllen muss.