Institut für Theoretische Teilchenphysik

Klassische Theoretische Physik I

WS 2014

Übungsblatt 3

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. M. Spinrath, Dr. S. Schacht

Abgabe: 14.11.2014
Besprechung: 21.11.2014

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt ihrer Lösung und geben Sie auf der ersten Seite Ihre Tutorgruppe (Ort, Zeit, Name des Tutors) an.

Aufgabe 5: Eine Ameise befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $x_0 \geq 0$ eines Gummibandes, das bei $x = 0$ eingespannt ist. Die Länge des Gummibandes ist $L(t) = L_0 + v_G t$, d.h. es wird mit der (konstanten) Geschwindigkeit v_G gedehnt. Die Ameise läuft mit Geschwindigkeit v_A zuf das Ende des Gummibandes zu. Parameter, die in die Kompetenz anderer KIT-Fakultäten fallen (Lebensdauer der Ameise, Zerreißlänge des Gummibandes) werden auf ∞ gesetzt.

a) (1 Punkt) Verifizieren Sie, dass der im Intervall $[t, t + dt]$ zurückgelegte Weg der Ameise $dx = v_A dt + v_G \dfrac{x(t)}{L(t)} dt$ ist.

Betrachten Sie $r(t) = x(t)/L(t)$ und drücken Sie $\dot{r}$ durch L_0, v_G und v_A aus.

b) (1 Punkt) Berechnen Sie $r(t)$. (Achten Sie dabei auf die Anfangsbedingung $r(0) = x_0/L_0$.) Geben Sie die Zeit T an, zu der die Ameise den Endpunkt $x = L$ erreicht hat.

c) (1 Punkt) Betrachten Sie den Fall $L_0 = 1m$, $v_G = 1\frac{m}{s}$, $v_A = 1cm/s$.

Wann erreicht die Ameise im Fall $x_0 = 0$ das Ende? Geben Sie T in Vielfachen des Alters des Universums von $13{,}8{\cdot}10^9$ Jahren an.

Inwieweit verbessert sich die Lage, wenn die Ameise einen Vorsprung $x_0 = L_0/2 = 0,5m$ bekommt?

d) (1 Punkt) Für $x_0 = 0$ betrachten wir nun eine diskretisierte Version des Problems: Im Intervall $[(n-1)\Delta t, n\Delta t]$, $n \in \mathbb{N}$, läuft zunächst die Ameise um ein Stück Δx, danach (zum Zeitpunkt $n\Delta t$) wird das Gummiband instantan von der Länge nL_0 auf die Länge $(n+1)L_0$ gedehnt. x_n bezeichne den Ort der Ameise nach dem n-ten Schritt (jedoch noch vor dem anschließenden Dehnen des Bandes), und wir betrachten $r_n = x_n/(nL_0)$, d.h. nach dem ersten Schritt ist $r_1 = \Delta x/L_0$. Welchen Fortschritt $\Delta r_k = r_k - r_{k-1}$ (für $k \geq 2$) macht die Ameise im k-ten Schritt? Zeigen Sie, dass r_n proportional zur *harmonischen Summe* ist: $r_n = \dfrac{\Delta x}{L_0} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

e) (1 Punkt) Während Physikerinnen und Physikern Integrale leicht von der Hand gehen, bereiten ihnen Summen oft Schwierigkeiten. Die *Euler-Maclaurin-Formel* erlaubt es, eine Summe durch ein Integral anzunähern:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \;=\; \int_1^n dx f(x) \,+\, \frac{f(n) + f(1)}{2} \,+\, \sum_{k=1}^{l} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(1) \right) + R_{2l}, \quad (1)$$

wobei das Restglied R_{2l} in der Näherung vernachlässigt wird. $f^{(j)}$ steht für die j-te Ableitung von f, und die *Bernoulli-Zahlen* B_j sind $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30\ldots$. Wir betrachten $r_3 = \dfrac{11}{6}\dfrac{\Delta x}{L_0}$ und $r_{20} = 3.59774\dfrac{\Delta x}{L_0}$. Berechnen Sie für beide Zahlen die Näherungen aus Gl. (1) für die Fälle $l = 0$, $l = 1$ und $l = 2$.

Hinweise: Sie können d) und e) auch dann lösen, wenn Sie a)-c) nicht bearbeitet haben.

Aufgabe 6: Wir betrachten ein Fahrzeug mit Masse m, das sich zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Geschwindigkeit v_0 bewegt, und für $t \geq 0$ durch die Luftreibung gebremst wird. Die Geschwindigkeit $v(t)$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\dot{v} = -\alpha v - \beta v^2, \qquad \alpha, \beta \geq 0. \tag{2}$$

$m\alpha v$ und $m\beta v^2$ sind die Beträge der *Stokes'schen* und der *Newton'schen* Reibungskraft.

a) (1 Punkt) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{1}{\alpha v + \beta v^2}$ für $\alpha \neq 0$.

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie $v(t)$. Achten Sie beim Integrieren darauf, dass das Argument des Logarithmus' dimensionslos ist. Drücken Sie die Integrationskonstante durch v_0 aus.
Zeichnen Sie $v(t)$ für $0 \leq t \leq 20s$ für den Fall $v_0 = 36m/s$, $\alpha = 2,5 \cdot 10^{-2} s^{-1}$, $\beta = 4 \cdot 10^{-3} m^{-1}$. Tragen Sie in die selbe Zeichnung die Lösungen für die Fälle ein, dass $\alpha = 0$ bzw. $\beta = 0$ gesetzt wird.
Hinweise: Sie können analog zur Gl. (10) der Vorlesung vorgehen. Betrachten Sie die Fälle $\alpha = 0$ und $\alpha \neq 0$ getrennt.

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie $x(t)$ zur Anfangsbedingung $x(0) = x_0$.
Zeichnen Sie den Weg $x(\infty) - x_0$, den das Fahrzeug zum Ausrollen braucht, als Funktion von α für $0 < \alpha \leq 2,5 \cdot 10^{-2} s^{-1}$ für die in b) angegebenen Werte von v_0 und β.
Hinweis: Substituieren Sie $z = e^{-\alpha t}$, um das Integral über $v(t)$ zu lösen.