Institut für Theoretische Teilchenphysik

Moderne Theoretische Physik für Lehramtskandidaten

WS 2015/16

Übungsblatt 12
Abgabe: Mi, 27.01.2016
14:00 Uhr im Briefkasten
Besprechung: Fr, 29.01.2016

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. S. Schacht, Dr. M. Spinrath

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt Ihrer Lösung und geben Sie auf der ersten Seite Ihre Tutorgruppe (Ort, Zeit, Name des Tutors) an.

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Der Impulsoperator P und der Ortsoperator X sind (für eine Raumdimension) in der Ortsdarstellung durch

$$P = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{und} \quad X = x \tag{1}$$

gegeben.

a) (1 Punkt) Benutzen Sie (1), um $[X^n, P]$ für $n \in \mathbb{N}$ zu berechnen.

b) (1 Punkt) Verwenden Sie die Vertauschungsrelation $[X, P] = i\hbar$, um $[X^n, P]$ und $[X, P^n]$ für $n \in \mathbb{N}$ zu berechnen.

c) (1 Punkt) Der *Translationsoperator* ist definiert als

$$\mathcal{T}_a = \exp\left[\frac{i}{\hbar} P a\right] \quad , \quad a \in \mathbb{R} \quad .$$

Es sei $\psi(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$ analytisch. Berechnen Sie $\mathcal{T}_a \psi(x)$. Wenn Sie $\mathcal{T}_a$ als aktive Transformation auffassen, wird dann $\psi(x)$ um $+a$ oder um $-a$ in x-Richtung verschoben?

d) (1 Punkt) Berechnen Sie durch Anwendung des Ergebnisses aus (c) auf $[X, \mathcal{T}_a]\psi(x)$ den Ausdruck

$$[\mathcal{T}_a, X] \, .$$

Interpretieren Sie Ihr Ergebnis: Welchen Unterschied macht es, ob Sie zuerst $\psi(x)$ um $\pm a$ in x-Richtung verschieben und dann den Ort messen oder die Reihenfolge der beiden Operationen vertauschen?

e) (1 Punkt) Die Eigenfunktionen von P sind $\psi_p(x) = \exp\left[\frac{i}{\hbar} p x\right]$ mit $p \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\psi_p(x)$ auch Eigenfunktion von $\mathcal{T}_a$ ist und bestimmen Sie die Eigenwerte. Betrachten Sie $\langle \mathcal{T}_a \chi | \mathcal{T}_a \psi \rangle$ für beliebige $\chi, \psi \in L^2[\mathbb{R}]$ und entscheiden Sie, ob $\mathcal{T}_a$ unitär ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Betrachten Sie die Wellenfunktion

$$\psi_b(x) = [\pi b^2]^{-1/4} \exp\left[-\frac{x^2}{2b^2}\right] \quad , \quad b > 0 \quad .$$

a) (0.5 Punkte) Zeichnen Sie $\psi_b(x)$ für $b = 1\,\text{cm}$ und $b = 5\,\text{cm}$. Berechnen Sie $\langle \psi | \psi \rangle$.

b) (0.5 Punkte) Berechnen Sie $\langle \psi_b | X | \psi_b \rangle$ und die Ortsunschärfe ΔX im Zustand ψ_b.

c) (1 Punkt) Die Fourier-Transformation und ihre Umkehrung sind definiert durch

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \, \widetilde{\psi}(p) e^{i \frac{px}{\hbar}} \, , \qquad \widetilde{\psi}(p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \psi(x) e^{-i \frac{px}{\hbar}} \, . \tag{2}$$

Berechnen Sie die Fouriertransformation von $\psi_b(x)$. Was fällt Ihnen auf?

d) (1 Punkt) Berechnen Sie $\langle\psi_b|P|\psi_b\rangle$ für den Impulsoperator P aus Aufgabe 1. Berechnen Sie auch die Impulsunschärfe ΔP und das Unschärfeprodukt $\Delta X \Delta P$ im Zustand ψ_b. (*Hinweis:* Verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil (c).)

e) (1 Punkt) Die kinetische Energie eines (nichtrelativistischen) Elektrons mit Masse m wird durch den Operator

$$H_{\mathrm{kin}} = \frac{P^2}{2m}$$

beschrieben. Berechnen Sie den Erwartungswert der kinetischen Energie, $\langle E_{\mathrm{kin}}\rangle = \langle\psi_b|H_{\mathrm{kin}}|\psi_b\rangle$. Berechnen Sie die Unschärfe der kinetischen Energie, $\Delta E_{\mathrm{kin}} = [\langle\psi_b|H^2|\psi_b\rangle - \langle E_{\mathrm{kin}}\rangle^2]^{1/2}$, im Zustand ψ_b. Was passiert mit $\langle E_{\mathrm{kin}}\rangle$ und ΔE_{kin}, wenn wir das Elektron immer weiter lokalisieren, also b immer kleiner wählen?

f) (1 Punkt) Die nichtrelativistische Näherung bricht ungefähr dann zusammen, wenn $\langle E_{\mathrm{kin}}\rangle = mc^2$ ist. Geben Sie den Wert b_{krit} an, bei dem dies der Fall ist. Aus der relativistischen Beziehung

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \dots$$

verschaffen wir uns den Operator der *relativistischen Korrektur*, $H_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{rel}} = -P^4/(8m^3c^2)$. Berechnen Sie $\langle E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{rel}}\rangle = \langle\psi_b|H_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{rel}}|\psi_b\rangle$ und zeichnen Sie (im selben Koordinatensystem) $\langle E_{\mathrm{kin}}\rangle/(mc^2)$ und $\langle E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{rel}}\rangle/(mc^2)$ als Funktion von b/b_{krit}.

Hinweis: Zur Berechnung von Integralen der Form $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^{2n} e^{-\alpha x^2}$ mit $\alpha > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ berechnen Sie zunächst $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2}$ und differenzieren Sie dann nach α.