

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt Ihrer Lösung und geben Sie auf der ersten Seite Ihre Tutorgruppe (Ort, Zeit, Name des Tutors) an.

Aufgabe 1 (5 Punkte):

a) (0.5 Punkte) Es sei A ein linearer Operator auf dem Vektorraum $\mathcal{H}$ ($\dim \mathcal{H} = N$). Aus der Vorlesung kennen Sie die Matrixdarstellung $A_{jk} = \langle e_j | A | e_k \rangle$ von A bzgl. der Orthonormalbasis $\{|e_1\rangle, \dots, |e_N\rangle\}$. Beweisen Sie

$$A = \sum_{j,k} A_{jk} |e_j\rangle \langle e_k| \quad .$$

Hinweis: Zwei Operatoren sind identisch wenn sie die gleiche Matrixdarstellung haben.

b) (0.5 Punkte) Die Zustände $|x\rangle$, $|y\rangle$ und $|\phi\rangle = \cos \phi |x\rangle + \sin \phi |y\rangle$ beschreiben linear polarisierte Photonen mit den Polarisationsrichtungen $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ und $\cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y$. Betrachten Sie den Operator $P_\phi = |\phi\rangle \langle \phi|$. Berechnen Sie die Matrixdarstellung von P_ϕ bzgl. $\{|x\rangle, |y\rangle\}$.

c) (1 Punkt) Licht sei in der Richtung $\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y$ polarisiert und werde durch den Zustandsvektor $|\alpha\rangle = \cos \alpha |x\rangle + \sin \alpha |y\rangle$ beschrieben. Der Erwartungswert einer Messung der Polarisation in Richtung $\cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y$ ist $w_\phi(\alpha) = \langle \alpha | P_\phi | \alpha \rangle$. Berechnen Sie diesen Erwartungswert sowie die Unschärfe

$$\Delta P_\phi(\alpha) = \sqrt{\langle \alpha | P_\phi^2 | \alpha \rangle - w_\phi(\alpha)^2} \quad .$$

Für welche α finden Sie maximale bzw. minimale Unschärfe?

d) (1 Punkt) Links- bzw. Rechts-Zirkular polarisierte Photonen werden beschrieben durch

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle) \quad , \quad |R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle) \quad .$$

Der Basiswechsel von $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ nach $\{|L\rangle, |R\rangle\}$ werde durch einen linearen Operator U mit $U|x\rangle = |L\rangle$ und $U|y\rangle = |R\rangle$ beschrieben. Zeigen Sie anhand der Matrixdarstellung von U , dass U unitär ist.

e) (1 Punkte) Betrachten Sie die Operatoren $P_L = |L\rangle \langle L|$ und $P_R = |R\rangle \langle R|$ und berechnen Sie die Matrixdarstellungen von P_L und P_R bezüglich der Basis $\{|x\rangle, |y\rangle\}$. Sind P_L und P_R hermitisch? Berechnen Sie die Matrixdarstellungen von $P_L P_R$, $P_R P_L$ sowie die Eigenwerte und Eigenvektoren von P_L und P_R und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

f) (1 Punkt) $|L\rangle$ und $|R\rangle$ sind Zustände mit *Helizität* -1 und $+1$.¹ Sie sind also Eigenzustände des Helizitätsoperators H mit $H|L\rangle = -|L\rangle$ und $H|R\rangle = +|R\rangle$. Berechnen Sie die Matrixdarstellung von H bzgl. $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ und bestimmen Sie die Erwartungswerte und Unschärfen von H für die Zustände $|x\rangle$ und $|y\rangle$.

¹Zur physikalischen Bedeutung: Die Helizität ist die Projektion des Drehimpulses auf die Bewegungsrichtung des Photons.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Es seien $A, B, C, X(t)$ und $Y(t)$ lineare Operatoren auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum mit Dimension N .

a) (0.5 Punkte) Zeigen Sie: $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.

b) (0.5 Punkte) Zeigen Sie: $[A, B]^\dagger = [B^\dagger, A^\dagger]$.

c) (1 Punkt) Zeigen Sie:

$$\frac{d}{dt}[X(t), Y(t)] = \left[\frac{d}{dt}X(t), Y(t) \right] + \left[X(t), \frac{d}{dt}Y(t) \right] \quad .$$

Dabei ist die Ableitung eines Operators definiert über seine Matrixdarstellung bezüglich einer (beliebigen) Orthonormalbasis $\{|e_1\rangle, \dots, |e_N\rangle\}$:

$$X(t) = \sum_{i,j=1}^N X_{ij}(t) |e_i\rangle \langle e_j| \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}X(t) = \sum_{i,j=1}^N \frac{dX_{ij}}{dt}(t) |e_i\rangle \langle e_j| \quad .$$

d) (1 Punkt) Es sei

$$X(t) = X_0(t) = e^{tA} B e^{-tA} \quad , \quad X_{n+1}(t) = [A, X_n(t)] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad (1)$$

wobei A und B nicht von t abhängen. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\frac{d^n}{dt^n} X(t) = X_n(t) \quad . \quad (2)$$

e) (1 Punkt) Beweisen Sie mit (2) die *Campbell-Baker-Hausdorff-Formel*

$$e^{tA} B e^{-tA} = B + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B_n \quad , \quad (3)$$

wobei B_n analog zu $X_n(t)$ in (1) definiert ist.

f) (1 Punkt) Betrachten Sie den Fall

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie B_n für alle $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie auch $e^{\pm tA}$ und verifizieren Sie (3).