

Institut für Theoretische Teilchenphysik
**Moderne Theoretische Physik für
Lehramtskandidaten**
WS 2015/16

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. S. Schacht, Dr. M. Spinrath



Übungsblatt 10
Abgabe: **Mi, 13.01.2016**
14:00 Uhr im Briefkasten
Besprechung: Fr, 15.01.2016

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt Ihrer Lösung und geben Sie auf der ersten Seite Ihre Tutorgruppe (Ort, Zeit, Name des Tutors) an.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Ein Photon γ der Frequenz ν stoße auf ein ruhendes Elektron e der Masse m . Nach dem Stoß habe das gestreute Photon γ' die Frequenz ν' und das Elektron habe Impuls $\mathbf{p}'_e$ und Energie E'_e . Der Streuwinkel zwischen γ und γ' sei α .

a) (3 Punkte) Stellen Sie den Energieerhaltungssatz und den Impulserhaltungssatz auf. Fassen sie beide Gleichungen zusammen, indem Sie die Vierer-Impulsvektoren

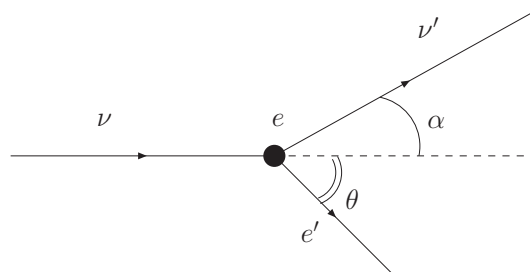
$$p_e = \begin{pmatrix} E_e/c \\ \mathbf{p}_e \end{pmatrix}, \quad p_\gamma = \begin{pmatrix} E_\gamma/c \\ \mathbf{p}_\gamma \end{pmatrix}, \quad p'_e = \begin{pmatrix} E'_e/c \\ \mathbf{p}'_e \end{pmatrix}, \quad p'_\gamma = \begin{pmatrix} E'_\gamma/c \\ \mathbf{p}'_\gamma \end{pmatrix},$$

definieren. Die ungestrichenen (gestrichenen) Größen beschreiben dabei die Situation vor (nach) dem Stoß. Berechnen Sie nun $(p_\gamma - p'_\gamma)^2$ und $(p_e - p'_e)^2$. Drücken Sie Ihre Ergebnisse durch E_γ , E'_γ , α und die Elektronmasse m aus. Welche Beziehung besteht zwischen E_γ , E'_γ und α ?

b) (2 Punkte) Leiten Sie aus Ihrem Ergebnis aus (a) die Compton-Formel

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \alpha)$$

ab. Dabei sind λ und λ' die Wellenlängen des einlaufenden bzw. gestreuten Photons und $h/(mc) \approx 2.4 \times 10^{-10} \text{ cm}$ ist die Compton-Wellenlänge des Elektrons.



Aufgabe 2 (5 Punkte): Sei A eine hermitesche $n \times n$ Matrix.

a) (0.5 Punkte) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von A reell sind.

b) (0.5 Punkte) Zeigen Sie, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A orthogonal sind.

c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass man stets eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A konstruieren kann. Zeigen Sie dazu zunächst, dass A stets mindestens einen Eigenwert λ besitzt. Definieren Sie dann den Eigenraum zu λ ,

$$E_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n : A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\} \subset \mathbb{C}^n \quad ,$$

und zeigen Sie, dass E_λ ein Vektorraum ist. Betrachten Sie dann das orthogonale Komplement von E_λ ,

$$E_\lambda^\perp = \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n : \mathbf{v}^\dagger \mathbf{u} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in E_\lambda\} \quad ,$$

und zeigen Sie, dass $E_\lambda^\perp$ ein A -invarianter Unterraum ist, also

$$A\mathbf{u} \in E_\lambda^\perp \quad \forall \mathbf{u} \in E_\lambda^\perp$$

gilt. Folgern Sie daraus die Behauptung.

d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass eine unitäre Matrix U und eine Diagonalmatrix D existieren mit

$$U^\dagger A U = D \quad .$$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen U , D und den Eigenwerten und Eigenvektoren von A ?

e) (2 Punkte) Sei B eine weitere hermitesche $n \times n$ Matrix, die mit A kommutiert, also

$$[A, B] = AB - BA = 0$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass eine Orthonormalbasis aus *gemeinsamen* Eigenvektoren von A und B existiert, also eine Basis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ von $\mathbb{C}^n$ mit $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ und $B\mathbf{v}_i = \mu_i \mathbf{v}_i$ für $i = 1, \dots, n$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$. Wie lässt sich dieses Ergebnis auf einen Satz von m kommutierenden hermiteschen Matrizen $A_1, \dots, A_m$ (mit $[A_i, A_j] = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, m\}$) erweitern?