Institut für Theoretische Teilchenphysik

Moderne Theoretische Physik für Lehramtskandidaten

WS 2015/16

Übungsblatt 4
Abgabe: Mi, 18.11.2015
14:00 Uhr im Briefkasten
Besprechung: Fr, 20.11.2015

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. S. Schacht, Dr. M. Spinrath

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt Ihrer Lösung und geben Sie auf der ersten Seite Ihre Tutorgruppe (Ort, Zeit, Name des Tutors) an.

Aufgabe 1 (5 Punkte): Die magnetische Induktion ist gegeben als

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}\,, \tag{1}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,, \tag{2}$$

wobei Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ und el. Strom I durch

$$I \equiv \int_A \vec{j}\,d\vec{A} \tag{3}$$

verknüpft sind. Wir betrachten jetzt einen unendlich langen unendlich dünnen Stromfaden mit konstantem Strom I,

$$\vec{j}(\vec{r}) = I\delta(x)\delta(y)\vec{e}_z\,. \tag{4}$$

a) (3 Punkte) Berechnen Sie $\vec{A}$. Verwenden Sie Zylinderkoordinaten, wobei Sie $\vec{e}_{z'} = \vec{e}_z$ wählen können:

$$\vec{r}\,' = \rho'\vec{e}_{\rho'} + z'\vec{e}_z\,, \tag{5}$$

$$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z\,. \tag{6}$$

Betrachten Sie dazu das Integral

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi}\vec{e}_z\int_{-a}^{a}\frac{dz'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{7}$$

mit $a > 0$. Am Ende werden wir den Limes $a \to \infty$ bilden. Bringen Sie das Integral auf die folgende Gestalt:

$$\int_{\frac{z-a}{\rho}}^{\frac{z+a}{\rho}}\frac{dz'}{\sqrt{1+z'^2}} = \mathrm{arcsinh}\left(\frac{a-z}{\rho}\right) + \mathrm{arcsinh}\left(\frac{a+z}{\rho}\right)\,. \tag{8}$$

Verwenden Sie anschließend die Entwicklung

$$\mathrm{arcsinh}\left(\frac{a\pm z}{\rho}\right) = \log(2) + \log\left(\frac{a}{\rho}\right) \pm \frac{z}{a} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{a^2}\right)\,. \tag{9}$$

b) (2 Punkte) Berechnen Sie $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ und bilden Sie den Limes $a \to \infty$. Verwenden Sie

$$\vec{\nabla}\times\left(\phi(\vec{r})\,\vec{G}(\vec{r})\right) = \left(\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\right)\times\vec{G} + \phi(\vec{r})\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)\,. \tag{10}$$

Was müssen Sie für $\phi(\vec{r})$ und $\vec{G}(\vec{r})$ einsetzen? Der Gradient ist in Zylinderkoordinaten wie folgt gegeben:

$$\mathrm{grad}V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{e}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z\,. \tag{11}$$

Geben Sie das Ergebnis in Zylinderkoordinaten an. Zeichnen Sie die Magnetfeldlinien in der $x-y-$Ebene.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Betrachten Sie eine ebene elektromagnetische Welle mit

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cdot \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\,, \tag{12}$$

für den Fall $\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$.

a) (1 Punkt) Zeichnen Sie die Wellenberge und -täler in der Ebene $z = 0$ für

$$\vec{k} = \frac{|\vec{k}|}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \frac{2\pi}{|\vec{k}|} = 500\,\mathrm{nm}\,. \tag{13}$$

b) (1 Punkt) Bestimmen Sie aus in der Vorlesung behandelten Gleichungen den Zusammenhang zwischen $|\vec{k}|$, ω und der Lichtgeschwindigkeit c.

c) (2 Punkte) Benutzen Sie die Maxwellgleichungen, um das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r},t)$ zu bestimmen.

d) (1 Punkt) Bestimmen Sie $\vec{k}\cdot\vec{E}_0$.