Institut für Theoretische Teilchenphysik

Moderne Theoretische Physik für Lehramtskandidaten

WS 2015/16

Übungsblatt 0
Keine Abgabe.
Besprechung: Fr, 23.10.2015

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. S. Schacht, Dr. M. Spinrath

Um Punktladungen mathematisch darzustellen, definieren wir die Diracsche δ-Distribution mittels

$$\int_V d^3r\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \begin{cases} 1, & \text{falls}\, r_0 \in V \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \tag{1}$$

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = 0 \quad \forall \vec{r} \neq \vec{r}_0 \,. \tag{2}$$

Es folgt im eindimensionalen Raum

$$\int_\alpha^\beta f(x)\delta(x-a)dx = \begin{cases} f(a), & \text{falls}\, \alpha < a < \beta \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}. \tag{3}$$

Die δ-Distribution ist keine Funktion, kann aber als Grenzwert von Funktionenfolgen dargestellt werden. Dies wird in Aufgabe 1 an einem Beispiel nachgerechnet. Aus Aufgabe 2 (s.u.) folgt

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)\,, \tag{4}$$

$$\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}\left(\delta(x-a)+\delta(x+a)\right)\,. \tag{5}$$

Aufgabe 1: Sei $\eta > 0$. Zeigen Sie, dass sich die diracsche δ-Distribution $\delta(x-a)$ als Grenzwert der Funktionenfolge

$$f_\eta(x-a) = \frac{1}{\sqrt{\pi\eta}}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{\eta}\right) \tag{6}$$

für $\eta \to 0$ schreiben lässt.

Aufgabe 2: $g(x)$ sei eine differenziebare Funktion mit einfachen Nullstellen x_n, d.h. $g(x_n)=0$ und $g'(x_n) \neq 0$. Zeigen Sie die folgende Identität:

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|}\delta(x-x_n)\,. \tag{7}$$