

### Aufgabe 14: Schemenabhängigkeit der QCD $\beta$ -Funktion

Die Beziehung zwischen der nackten QCD Kopplung  $g^{(0)}$  und der renormierten Kopplung  $\bar{g}$  im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema lautet

$$g^{(0)} = \bar{Z} \bar{g} \mu^\epsilon \frac{e^{\epsilon \gamma_E}}{(4\pi)^{\epsilon/2}} \quad .$$

Dabei ist  $\mu$  die Renormierungsskala und  $\bar{Z}$  die Renormierungskonstante. Zusätzlich betrachten wir ein weiteres massenunabhängiges<sup>1</sup> Renormierungsschema  $S$  mit renormierter Kopplung  $\hat{g}$  und Renormierungskonstante  $\hat{Z}$ :

$$g^{(0)} = \hat{Z} \hat{g} \mu^\epsilon \frac{e^{\epsilon \gamma_E}}{(4\pi)^{\epsilon/2}} \quad .$$

Die zwei Schemen unterscheiden sich um eine endliche Renormierung:

$$\hat{Z} = z(\bar{g}) \bar{Z} \quad \text{mit} \quad z(\bar{g}) = 1 + z_0 \bar{g}^2 + z_1 \bar{g}^4 + z_2 \bar{g}^6 + \dots \quad .$$

- a) Drücken Sie  $\hat{g}$  durch  $\bar{g}$  aus.
- b) Die Kopplung im  $\overline{\text{MS}}$ -Schema erfüllt die Renormierungsgruppengleichung

$$\mu \frac{d\bar{g}(\mu)}{d\mu} = \bar{\beta}(\bar{g}(\mu)) = -\bar{\beta}_0 \bar{g}^3 - \bar{\beta}_1 \bar{g}^5 - \bar{\beta}_2 \bar{g}^7 - \dots \quad .$$

Analog erfüllt die Kopplung im Schema  $S$

$$\mu \frac{d\hat{g}(\mu)}{d\mu} = \hat{\beta}(\hat{g}(\mu)) = -\hat{\beta}_0 \hat{g}^3 - \hat{\beta}_1 \hat{g}^5 - \hat{\beta}_2 \hat{g}^7 - \dots \quad .$$

Drücken Sie  $\bar{\beta}(\bar{g})$  durch  $\hat{\beta}$ ,  $z$  und  $\bar{g}$  aus. Zeigen Sie, dass  $\hat{\beta}_0 = \bar{\beta}_0$  und  $\hat{\beta}_1 = \bar{\beta}_1$  ist und drücken Sie  $\hat{\beta}_2$  durch  $\bar{\beta}_2$  aus.

<sup>1</sup>Das bedeutet, dass  $\bar{Z}$  bzw.  $\hat{Z}$  nur von  $\bar{g}$  bzw.  $\hat{g}$  abhängen, aber weder Massen noch Impulse enthalten.