Prof. Dr. U. Nierste

Dr. S. Schacht

Übungsblatt 7

Besprechung: Di, 31.05.2016

Aufgabe 9: Diskrete Symmetrien und Quark-Stöme

Das Transformationsverhalten eines Dirac-Feldes $\psi(t,\mathbf{x})$ unter den diskreten Transformationen $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$ und $\mathcal{T}$ ist

$$\mathcal{C}\psi(t,\mathbf{x})\mathcal{C}^{-1} = C\bar{\psi}(t,\mathbf{x})^{\mathsf{T}} \quad , \quad \mathcal{P}\psi(t,\mathbf{x})\mathcal{P}^{-1} = P\psi(t,-\mathbf{x}) \quad ,$$
$$\mathcal{T}\psi(t,\mathbf{x})\mathcal{T}^{-1} = T\psi(-t,\mathbf{x}) \quad ,$$

mit $C = i\gamma^0\gamma^2$, $P = \gamma^0$ und $T = \gamma^1\gamma^3$.

a) Betrachten Sie zwei Dirac-Felder $\psi(t,\mathbf{x})$ und $\psi'(t,\mathbf{x})$. Wie transformieren die Produkte $\bar{\psi}(t,\mathbf{x})P_L\psi'(t,\mathbf{x})$ und $\bar{\psi}(t,\mathbf{x})P_R\psi'(t,\mathbf{x})$ (mit $P_L = (\mathbb{1}-\gamma_5)/2$ und $P_R = (\mathbb{1}+\gamma_5)/2$) unter $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{CP}$ und $\mathcal{CPT}$?

b) Wie transformieren die Produkte $\bar{\psi}(t,\mathbf{x})\gamma^\mu P_L\psi'(t,\mathbf{x})$ und $\bar{\psi}(t,\mathbf{x})\gamma^\mu P_R\psi'(t,\mathbf{x})$ unter $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{CP}$ und $\mathcal{CPT}$?

c) Wie transformiert das Produkt $\bar{\psi}(t,\mathbf{x})\sigma^{\mu\nu}\psi'(t,\mathbf{x})$ (mit $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$) unter $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{CP}$ und $\mathcal{CPT}$?

Aufgabe 10: Dirac-Basis und Fierz-Identitäten

Aus Produkten der Dirac-Matrizen γ^μ lässt sich eine Basis des Raumes der komplexen 4×4-Matrizen konstruieren. Die Basismatrizen sind

$$\mathcal{B} = \{P_L \ , \ P_R \ , \ \gamma^\mu P_L \ , \ \gamma^\mu P_R \ , \ \sigma^{\mu\nu} \mid \mu,\nu = 0,\ldots,3\}$$

mit

$$\sigma^{\mu\nu} = \tfrac{i}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu] \quad , \quad P_L = \tfrac{1}{2}(\mathbb{1}-\gamma_5) \quad , \quad P_R = \tfrac{1}{2}(\mathbb{1}+\gamma_5) \quad .$$

a) Berechnen Sie die Spuren $\mathrm{Tr}(\Gamma_1\Gamma_2)$ mit $\Gamma_1,\Gamma_2 \in \mathcal{B}$.

b) Sei Γ eine beliebige komplexe 4×4-Matrix. In der Dirac-Basis $\mathcal{B}$ lässt sich Γ schreiben als

$$\Gamma = s^L P_L + s^R P_R + v^L_\mu \gamma^\mu P_L + v^R_\mu \gamma^\mu P_R + c_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \quad .$$

Drücken Sie die Koeffizienten $s^{L,R}$, $v^{L,R}_\mu$ und $c_{\mu\nu}$ durch Spuren der Form $\mathrm{Tr}(\Gamma'\Gamma)$ mit $\Gamma' \in \mathcal{B}$ aus.

c) Entwickeln Sie die Matrizen $\sigma^{\mu\nu}P_L$ und $\sigma^{\mu\nu}P_R$ in der Dirac-Basis $\mathcal{B}$. Berechnen Sie das äußere Produkt $(\sigma_{\mu\nu}P_L)_{ab}(\sigma^{\mu\nu}P_R)_{cd}$.

d) Tensoren T_{abcd} mit vier Dirac-Indizes lassen sich in einer Basis aus äußeren Produkten von Dirac-Matrizen entwickeln:

$$T_{abcd} = \sum_{\Gamma,\Gamma'\in\mathcal{B}} C_{\Gamma,\Gamma'}\Gamma_{ab}\Gamma'_{cd} \quad .$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten $C_{\Gamma,\Gamma'}$ dieser Entwicklung für

i) $T_{abcd} = (P_L)_{ad}(P_L)_{cb}$ und $T_{abcd} = (P_R)_{ad}(P_R)_{cb}$,

ii) $T_{abcd} = (\gamma^\mu P_L)_{ad}(\gamma_\mu P_L)_{cb}$ und $T_{abcd} = (\gamma^\mu P_R)_{ad}(\gamma_\mu P_R)_{cb}$,

iii) $T_{abcd} = (\gamma^\mu P_L)_{ad}(\gamma_\mu P_R)_{cb}$ und $T_{abcd} = (\gamma^\mu P_R)_{ad}(\gamma_\mu P_L)_{cb}$,

Diese Identitäten nennt man *Fierz-Identitäten.*