Institut für Theoretische Teilchenphysik

Einführung in die Flavourphysik
SoSe 2016

Prof. Dr. U. Nierste — **Übungsblatt 6**
Dr. S. Schacht — **Besprechung: Di, 24.05.2016**

Aufgabe 7: $B \to \pi\pi$ Zerfälle und reduzierte Matrixelemente

Der Zerfall von B-Mesonen in zwei Pionen wird zu führender Ordnung in der schwachen Wechselwirkung beschrieben durch den S-Operator

$$S = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_{q=u,c,t} V_{qb}^* V_{qd} O_q$$

$$\text{mit} \quad O_q = \int d^4x \int d^4y \, T\{W_\mu^-(x) W_\nu^+(y) [\bar{b}(x)\gamma^\mu(\mathbb{1}-\gamma_5)q(x)][\bar{q}(y)\gamma^\nu(\mathbb{1}-\gamma_5)d(y)]\} \quad .$$

Hier bezeichnet $T\{\ldots\}$ das zeitgeordnete Produkt. Die entsprechenden Feynman-Diagramme sind in Abb. 1 gezeigt.

a) In Abb. 1(a) trägt nur der Term mit O_u bei. Um die Isospin-Zerlegung dieses Terms zu bestimmen schreiben wir (wie in Aufgabe 6) $q \equiv (q_1, q_2) \equiv (u, d)$ und definieren

$$Q_{ijk} = \int d^4x \int d^4y \, T\{W_\mu^-(x) W_\nu^+(y) [\bar{b}(x)\gamma^\mu(\mathbb{1}-\gamma_5)q_i(x)][\varepsilon_{jl}\bar{q}_l(y)\gamma^\nu(\mathbb{1}-\gamma_5)q_k(y)]\} \quad ,$$

so dass $O_u = -Q_{122}$ gilt. Aus den Q_{ijk} lassen sich nun Linearkombinationen Q^{I,I_3} bilden, die unter Isospin-Transformationen wie Spin-I-Darstellungen transformieren. Was sind die möglichen Werte für I? Zeigen Sie, dass sich O_u (bei passender Normierung der Q^{I,I_3}) schreiben lässt als

$$O_u = Q^{1/2,-1/2} + Q^{3/2,-1/2} \quad .$$

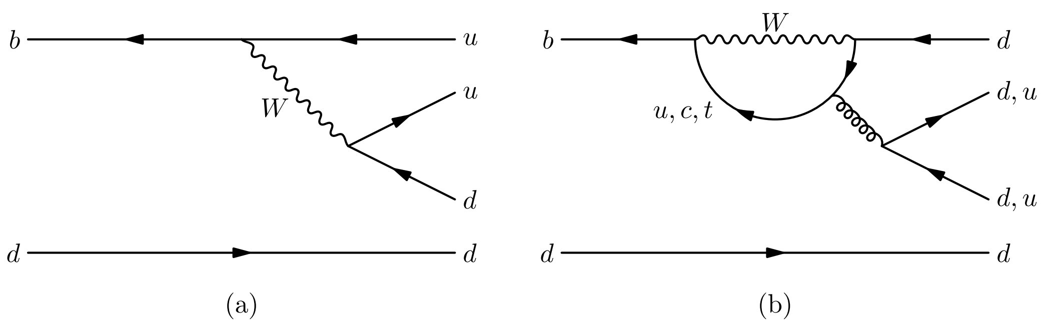

Figure 1: Tree-Level (a) und Pinguin-Diagramm (b) für $B \to \pi\pi$ Zerfälle.

b) In Abb. 1(b) tragen auch die Operatoren O_c und O_t bei. Für deren Isospin-Zerlegung definieren wir

$$P_i^c = \int d^4x \int d^4y \, T\{W_\mu^-(x) W_\nu^+(y) [\bar{b}(x)\gamma^\mu(\mathbb{1}-\gamma_5)c(x)][\bar{c}(y)\gamma_\mu(\mathbb{1}-\gamma_5)q_i(y)]\} \quad . \quad (1)$$

Analog definieren wir P_i^t, indem wir in (1) die Charm-Felder durch Top-Felder ersetzen. Dann ist $O_{c,t} = P_2^{c,t}$. Wie transformieren die Operatoren $P_i^{c,t}$ unter Isospin-Transformationen?

c) Wir bezeichnen mit $|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \equiv |B^+\rangle$ und $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \equiv |B^0\rangle$ die Isospin-Eigenzustände der B-Mesonen und mit $\langle 0, 0|$ und $\langle 2, J_3|$ ($J_3 \in \{-2, \ldots, 2\}$) die Isospin-Eigenzustände des zwei-Pion-Systems (vgl. Aufgabe 6). Nach dem Wigner-Eckardt-Theorem lassen sich die Matrixelemente $\langle J, J_3|Q^{I,I_3}|s, s_3\rangle$ (mit $J \in \{0, 2\}$, $J_3 \in \{-J, \ldots, J\}$, $I \in \{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\}$, $I_3 \in \{-I, \ldots, I\}$, $s = \frac{1}{2}$ und $s_3 \in \{-s, +s\}$) durch die Clebsch-Gordan-Koeffizienten $C^{I,I_3}_{J,J_3;s,s_3} \equiv \langle J, J_3; s, s_3|I, I_3\rangle$ und zwei (experimentell zu bestimmende) komplexe Zahlen $A_{1/2}$ und $A_{3/2}$ (sog. *reduzierte Matrixelemente*) ausdrücken:

$$\langle 2, I_3|Q^{3/2,J_3}|\tfrac{1}{2}, s_3\rangle = A_{3/2} C^{1/2,s_3}_{2,I_3;3/2,J_3} \quad , \quad \langle 0, 0|Q^{1/2,J_3}|\tfrac{1}{2}, s_3\rangle = A_{1/2} C^{1/2,s_3}_{0,0;1/2,J_3}$$

und alle anderen Matrixelemente sind Null. Analog sind die Matrixelemente der $P_i^{c,t}$ durch reduzierte Matrixelemente $A^{c,t}_{1/2}$ bestimmt:

$$\langle 0, 0|P^{c,t}_{J_3}|\tfrac{1}{2}, s_3\rangle = A^{c,t}_{1/2} C^{1/2,s_3}_{1/2,J_3;0,0}$$

mit $P_1^{c,t} \equiv P^{c,t}_{+1/2}$, $P_2^{c,t} \equiv P^{c,t}_{-1/2}$ und alle anderen Matrixelemente sind Null. Drücken Sie die Matrixelemente $\langle I, I_3|O_u|\frac{1}{2}, s_3\rangle$ und $\langle I, I_3|P^{c,t}_{-1/2}|\frac{1}{2}, s_3\rangle$ durch $A_{1/2}$, $A_{3/2}$ und $A^{c,t}_{1/2}$ aus.

d) Drücken Sie Matrixelemente $\langle \pi^0\pi^0|O_q|B^0\rangle$, $\langle \pi^+\pi^-|O_q|B^0\rangle$ und $\langle \pi^+\pi^0|O_q|B^+\rangle$ (mit $q = u, c, t$) durch $A_{1/2}$, $A_{3/2}$ und $A^{c,t}_{1/2}$ aus.

Aufgabe 8: Die β-Funktion von α_s

Der Wert der starken Kopplungskonstante α_s hängt von der Renormierungsskala μ ab. Die Abhängigkeit ist bestimmt durch die Differentialgleichung

$$\frac{d\alpha_s(\mu)}{d(\ln\mu)} = \beta(\alpha_s(\mu)) = -\frac{\beta_0}{2\pi}\alpha_s(\mu)^2 - \frac{\beta_1}{4\pi^2}\alpha_s(\mu)^3 - \ldots \quad .$$

Die Koeffizienten β_0, β_1 etc. können störungstheoretisch berechnet werden:

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f \quad , \quad \beta_1 = 51 - \frac{19}{3}n_f \quad ,$$

wobei n_f die Anzahl der Quark-Flavours ist.

a) Nehmen Sie an, dass α_s bei der Skala $\mu = Q$ bekannt ist. Berechnen Sie $\alpha_s(\mu)$ für $\mu \neq Q$ zur ersten Ordnung (d.h. vernachlässigen Sie den Term mit β_1).

b) Zeigen Sie, dass sich $\alpha_s(\mu)$ schreiben läßt als

$$\alpha_s(\mu) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(\mu^2/\Lambda^2)} \quad .$$

Drücken Sie Λ durch $\alpha_s(Q)$ aus. Wie hängt Λ von n_f ab? Was passiert für $\mu \approx \Lambda$?

c) Berücksichtigen Sie nun den Term mit β_1. Zeigen Sie, daß zur führenden Ordnung in $\ln(\mu^2/\Lambda^2)^{-1}$ gilt

$$\alpha_s(\mu) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(\mu^2/\Lambda^2)} \left(1 - \frac{2\beta_1 \ln(\ln(\mu^2/\Lambda^2))}{\beta_0^2 \ln(\mu^2/\Lambda^2)}\right) + \mathcal{O}(1/\ln^3(\mu^2/\Lambda^2))$$

mit

$$\Lambda = Q e^{-2\pi/\beta_0 \alpha_s(Q)} \left(\frac{4\pi + 2\beta_1 \alpha_s(Q)/\beta_0}{\beta_0 \alpha_s(Q)}\right)^{\beta_1/\beta_0^2} \quad .$$