Institut für Theoretische Teilchenphysik

Einführung in die Flavourphysik
SoSe 2016

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. S. Schacht

Übungsblatt 5
Besprechung: Di, 17.05.2016

Aufgabe 6: Pionen und Isospin

Wir bezeichnen mit $(q_u, q_d) \equiv (u, d)$ das Isospin-Quarkdublett der ersten Generation und betrachten die Feldoperatoren

$$\pi_{ij}(\mathbf{p}) \equiv \int d^3\mathbf{x}\, e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} {:}\bar{q}_i(0,\mathbf{x})\gamma_5 q_j(0,\mathbf{x}){:} \quad \text{mit } i,j \in \{u,d\} \quad .$$

Hier bezeichnet $:\cdot:$ Normalordnung (alle Erzeuger links von allen Vernichtern). Pion-Zustände erzeugt man, indem man geeignete Linearkombinationen der Operatoren $\pi_{ij}(\mathbf{p})$ auf das Vakuum $|0\rangle$ wirken läßt.

a) Die Quarkfelder transformieren unter Ladungskonjugation C, Paritätstransformationen P und Poincarétransformationen $U(\Lambda, a)$ wie folgt:

$$\mathsf{C} q_i(x) \mathsf{C}^\dagger = i\gamma^0\gamma^2 \bar{q}_i^{\mathsf{T}}(x) \equiv \mathcal{C}\bar{q}_i^{\mathsf{T}}(x) \quad , \quad \mathsf{P} q_i(t,\mathbf{x})\mathsf{P}^\dagger = \gamma^0 q_i(t,-\mathbf{x}) \quad ,$$
$$U(\Lambda,a) q_i(x) U^\dagger(\Lambda,a) = S(\Lambda^{-1}) q_i(\Lambda x + a) \quad .$$

Dabei ist $S(\Lambda)$ die Darstellung der Lorentztransformation Λ im Raum der Dirac-Spinoren:

$$S(\mathbb{1}+\omega) = \exp(-\tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}) \quad \text{mit} \quad \sigma^{\mu\nu} = \tfrac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad .$$

Wie transformieren die Operatoren $\pi_{ij}(\mathbf{p})$ unter räumlichen Translationen, Ladungskonjugation und Paritätstransformationen? Wie transformieren $\pi_{ij}(\mathbf{0})$ unter Drehungen? Welche Impuls-, Drehimpuls- und Paritätsquantenzahlen haben die Zustände $\pi_{ij}(\mathbf{0})|0\rangle$?
Hinweis: In einem normalgeordneten Produkt antivertauschen alle Fermion-Operatoren. Zeigen Sie zunächst, dass $\mathsf{C}\bar{q}_i\mathsf{C}^\dagger = q_i^{\mathsf{T}}\mathcal{C}$ und $\mathsf{P}\bar{q}_i(t,\mathbf{x})\mathsf{P}^\dagger = \bar{q}_i(t,-\mathbf{x})\gamma^0$ ist.

b) Wenn man die Massen der up- und down-Quarks gleichsetzt, hat die QCD eine zusätzliche SU(2)-Symmetrie, die man *Isospinsymmetrie* nennt. Die Quarkfelder q_i transformieren unter einer Isospin-Transformation in der fundamentalen Darstellung:

$$q_i(x) \to U_{ij} q_j(x)$$

mit $U \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, $U^\dagger = U^{-1}$ und $\det U = 1$. Wie transformieren die Operatoren $\pi_{ij}(\mathbf{p})$ unter Isospin-Transformationen? Definieren Sie $\tilde{\pi}_{ij}(\mathbf{p}) = -\varepsilon_{ik}\pi_{kj}(\mathbf{p})$, wobei $\varepsilon = i\sigma_2$ der zweidimensionale Levi-Civita-Tensor ist. Wie transformieren die Operatoren $\tilde{\pi}_{ij}(\mathbf{p})$ unter Isospin-Transformationen? Zerlegen Sie den durch die vier Operatoren $\tilde{\pi}_{ij}(\mathbf{p})$ aufgespannten Vektorraum in irreduzible Darstellungen der SU(2), d.h. bilden Sie (analog zur Drehimpulsaddition in der Quantenmechanik) Linearkombinationen $\pi^{I,I_3}(\mathbf{p})$ der Operatoren $\tilde{\pi}_{ij}(\mathbf{p})$, die gemäß Spin-$I$-Darstellungen der Isospin-$SU(2)$ transformieren. Bestimmen Sie das Transformationsverhalten dieser Operatoren unter Ladungskonjugation und Paritätstransformationen sowie ihre elektrische Ladung.
Hinweis: Für jede SU(2)-Matrix U gilt $\varepsilon U^* = U\varepsilon$.

c) Pion-Zustände mit Impuls $\mathbf{p}$ werden erzeugt, indem man die Operatoren $\pi^{I,I_3}(\mathbf{p})$ mit $I = 1$ und $I_3 \in \{-1, 0, +1\}$ auf das Vakuum wirken läßt. Wir bezeichnen diese Operatoren im Folgenden mit $\pi^{\pm}(\mathbf{p})$ und $\pi^0(\mathbf{p})$. Wir betrachen nun die zwei-Pionoperatoren

$$O^{ij}_{\pi\pi}(p) = \frac{1}{p^2\sqrt{8\pi}} \int d^3\mathbf{k}\, \delta(|\mathbf{k}| - p) {:}\pi^i(\mathbf{k})\pi^j(-\mathbf{k}){:}$$

mit $i, j \in \{-, 0, +\}$ und $p \in \mathbb{R}$. Wie transformieren die $O^{ij}_{\pi\pi}(p)$ unter Rotationen und Isospin-Transformationen? Finden Sie für festes p Linearkombinationen $Q^{I,I_3}_{\pi\pi}$ der $O^{ij}_{\pi\pi}(p)$, die gemäß irreduzibler Darstellungen der Isospin-Symmetrie transformieren.
Hinweis: Beachten Sie, dass die Pion-Operatoren im normalgeordneten Produkt vertauschen.

d) Die G-Paritätstransformation ist definiert als das Produkt von Ladungskonjugation C und einer bestimmten Isospin-Transformation:

$$Gq_i(x)G^\dagger = (e^{i\pi\sigma_2/2})_{ij}\mathsf{C}q_j(x)\mathsf{C}^{-1} \quad ,$$

wobei σ_2 die zweite Pauli-Matrix ist. Wie transformieren die Pion-Operatoren $\pi^{\pm}$ und π^0 unter G-Parität? Erlaubt die QCD Streuprozesse wie $\pi^+\pi^- \to \pi^+\pi^-\pi^0$?