

Moderne Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. Jaquier, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 7 – Teil A

Ausgabe: 18.01.19 – Abgabe: 01.02.19 bis 11:00 Uhr – Besprechung: 05.02.19

Aufgabe 1: Spin flip

2 Punkte

Ein neutrales Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen mit magnetischem Moment $\vec{\mu} = \mu\vec{\sigma}$ ist in einem externen homogenen Magnetfeld \vec{B}_0 und befindet sich in einem Zustand mit einem bestimmten Wert der Spinprojektion entlang der Feldrichtung. Das Feld \vec{B}_0 hat eine hohe Intensität und wird deswegen klassisch behandelt. Die Wechselwirkung zwischen dem Teilchen und dem Magnetfeld wird dann durch den Operator

$$H_{\text{spin}} = -\vec{\mu} \cdot (\vec{B}_0 + \vec{B}_{\text{rad}})$$

beschrieben, wobei \vec{B}_{rad} das durch elektromagnetische Strahlung hervorgerufene quantisierte Magnetfeld ist. Dieses wird als eine Störung betrachtet. In dieser Aufgabe soll die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit dafür berechnet werden, dass aufgrund eines Umklappen des Spins des Teilchens ein Photon emittiert wird.

- (a) Für die Rechnung soll die Wirkung der Teilchenbahn auf die Emission vernachlässigt werden ($\vec{r} = 0$) und nur die Spinfreiheitsgrade betrachtet werden. Zeigen Sie, dass die differentielle Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit gegeben ist durch

$$dw = \frac{\omega_k \mu^2 d\Omega}{2\pi \hbar c} \left| \vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot (\vec{k} \times \langle \psi_1 | \vec{\sigma} | \psi_2 \rangle) \right|^2,$$

wobei $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ die beiden Spinwellenfunktionen sind.

- (b) Berechnen Sie aus dem Ausdruck in a) die Gesamtwahrscheinlichkeit w für die Emission des Photons.

Aufgabe 2: Photon-Streuung an sphärischem Rotor

3 Punkte

In dieser Aufgabe soll der elastische Streuquerschnitt pro Zeiteinheit eines Photons an einem sphärischen Rotor mit Trägheitsmoment I und elektrischem Dipolmoment \vec{d} entlang der Achse des Rotors berechnet werden. Der Rotor wird durch die Funktionen Y_{lm} beschrieben und hat die Energie $E_{\text{rotor}} = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1)$. Die Wechselwirkung zwischen dem Rotor und dem Strahlungsfeld wird dabei durch

$$V = -\vec{d} \cdot \vec{E}_{\text{rad}}(\vec{0}) = -d_0 \vec{n} \cdot \vec{E}_{\text{rad}}(\vec{0})$$

gegeben, wobei \vec{E}_{rad} das elektrische Feld ist. Da wir Photonstreuung betrachten, trägt diese Wechselwirkung erst ab zweiter Ordnung in Störungstheorie bei. Die Formel dazu ist

$$dw_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| V_{fi} + \sum_{\nu} \frac{V_{f\nu}V_{\nu i}}{E_i - E_{\nu}} \right|^2 d\rho_f,$$

wobei V_{fi} in diesem Fall null ist und die Summe über alle erlaubten Zwischenzustände läuft. Der Rotor befinde sich vor der Streuung im Grundzustand Y_{00} .

- (a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}_{\text{rad}}(0)$.
- (b) Geben Sie die Wellenfunktion und die Energie der erlaubten Zwischenzustände an.
- (c) Setzen Sie die in *b*) berechneten Wellenfunktionen in der obigen Formel ein. Argumentieren Sie, warum die Vollständigkeitsrelation für die Kugelflächenfunktionen der Zwischenzustände eingesetzt werden kann, und berechnen Sie den differentiellen Streuquerschnitt $d\sigma = \frac{V}{c}dw_{fi}$.
- (d) Die Polarisation des einfallenden Photons sei nicht bekannt. Mitteln Sie über die Polarisationen des einfallenden Photons, summieren Sie über die Polarisationen des ausgehenden Photons und berechnen Sie den totalen Streuquerschnitt.