Moderne Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. Jaquier, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 7

Ausgabe: 25.01.19 – Abgabe: 01.02.19 bis 11:00 Uhr – Besprechung: 05.02.19

Aufgabe 1: Spin flip — 2 Punkte

Ein neutrales Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen mit magnetischem Moment $\vec{\mu} = \mu\vec{\sigma}$ ist in einem externen homogenen Magnetfeld $\vec{B}_0$ und befindet sich in einem Zustand mit einem bestimmten Wert der Spinprojektion entlang der Feldrichtung. Das Feld $\vec{B}_0$ hat eine hohe Intensität und wird deswegen klassisch behandelt. Die Wechselwirkung zwischen dem Teilchen und dem Magnetfeld wird dann durch den Operator

$$H_{\text{spin}} = -\vec{\mu} \cdot (\vec{B}_0 + \vec{B}_{\text{rad}})$$

beschrieben, wobei $\vec{B}_{\text{rad}}$ das durch elektromagnetische Strahlung hervorgerufene quantisierte Magnetfeld ist. Dieses wird als eine Störung betrachtet. In dieser Aufgabe soll die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit dafür berechnet werden, dass aufgrund eines Umklappen des Spins des Teilchens ein Photon emittiert wird.

(a) Für die Rechnung soll die Wirkung der Teilchenbahn auf die Emission vernachlässigt werden ($\vec{r} = 0$) und nur die Spinfreiheitsgrade betrachtet werden. Zeigen Sie, dass die differentielle Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit gegeben ist durch

$$\mathrm{d}w = \frac{\omega_k \mu^2 \mathrm{d}\Omega}{2\pi\hbar c} \left| \vec{\epsilon}_{\vec{k}\sigma} \cdot (\vec{k} \times \langle\psi_1|\vec{\sigma}|\psi_2\rangle) \right|^2 ,$$

wobei $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ die beiden Spinwellenfunktionen sind.

(b) Berechnen Sie aus dem Ausdruck in *a*) die Gesamtwahrscheinlichkeit w für die Emission des Photons.

Aufgabe 2: Photon-Streuung an sphärischem Rotor — 3 Punkte

In dieser Aufgabe soll der elastische Streuquerschnitt pro Zeiteinheit eines Photons an einem sphärischen Rotor mit Trägheitsmoment I und elektrischem Dipolmoment $\vec{d}$ entlang der Achse des Rotors berechnet werden. Der Rotor wird durch die Funktionen Y_{lm} beschrieben und hat die Energie $E_{\text{rotor}} = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1)$. Die Wechselwirkung zwischen dem Rotor und dem Strahlungsfeld wird dabei durch

$$V = -\vec{d} \cdot \vec{E}_{\text{rad}}(\vec{0}) = -d_0 \vec{n} \cdot \vec{E}_{\text{rad}}(\vec{0})$$

gegeben, wobei $\vec{E}_{\text{rad}}$ das elektrische Feld ist. Da wir Photonstreuung betrachten, trägt diese Wechselwirkung erst ab zweiter Ordnung in Störungstheorie bei. Die Formel dazu ist

$$\mathrm{d}w_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| V_{fi} + \sum_{\nu} \frac{V_{f\nu} V_{\nu i}}{E_i - E_\nu} \right|^2 \mathrm{d}\rho_f,$$

wobei V_{fi} in diesem Fall null ist und die Summe über alle erlaubten Zwischenzuständen läuft. Der Rotor befinde sich vor der Streuung im Grundzustand Y_{00}.

(a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}_{\text{rad}}(0)$.

(b) Geben Sie die Wellenfunktion und die Energie der erlaubten Zwischenzuständen an.

(c) Setzen Sie die in *b*) berechneten Wellenfunktionen in der obigen Formel ein. Argumentieren Sie, warum die Vollständigkeitsrelation für die Kugelflächenfunktionen der Zwischenzuständen eingesetzt werden kann, und berechnen Sie den differentiellen Streuquerschnitt $\mathrm{d}\sigma = \frac{V}{c}\mathrm{d}w_{fi}$.

(d) Die Polarisation des einfallenden Photons sei nicht bekannt. Mitteln Sie über die Polarisationen des einfallenden Photons, summieren Sie über die Polarisationen des ausgehenden Photons und berechnen Sie den totalen Streuquerschnitt.

Aufgabe 3: Inverser photoelektrischer Effect $\boxed{\textbf{2 Punkte}}$

Der *inverse* photoelektrische Effekt (IPE) bezeichnet das Einfangen eines schnellen Elektrons durch einem Proton, wodurch ein Wasserstoffatom im Grundzustand entsteht sowie ein Photon emittiert wird.

(a) Zeigen Sie, dass die Anzahl freier Elektronenzustände im Energieintervall dE_e mit Ausbreitungsrichtung im Raumwinkel $d\Omega$ gegeben ist durch

$$\rho_e(E_e)\, dE_e\, d\Omega = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{mk_e}{\hbar^2}\, dE_e\, d\Omega \ , \tag{1}$$

während die entsprechende Anzahl von Photonzuständen gegeben ist durch

$$\rho_\gamma(E)\, dE\, d\Omega = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{\omega^2}{\hbar c^3}\, dE\, d\Omega \ , \tag{2}$$

wobei $E = \hbar\omega = \hbar ck$. Die Energie des schnellen Elektrons ist näherungsweise gleich der Energie des emittierten Photons. Zeigen Sie, dass das Verhältnis der Wellenvektoren des Photons und des Elektrons in dieser Näherung $k/k_e \approx v_e/(2c)$ ist.

(b) Passen Sie die Rechnung aus der Vorlesung für den Photoelektrischen Effekt (PE) an um zu zeigen, dass der Wirkungsquerschnitt für den *inversen* Photoelektrischen Effekt gegeben ist durch

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{IPE}} = \frac{\hbar\omega}{mc^2} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{PE}} = 16 Z^5 \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3 \left(\frac{\hbar^2}{me^2}\right)^2 \left(\frac{I_0}{\hbar\omega}\right)^{5/2} \sin^2\theta \ , \tag{3}$$

wobei die Bindungsenergie des Grundzustandes im Wasserstoffatom $I_0 = me^4/(2\hbar^2)$ viel kleiner als die Energie des Elektrons ist.

Aufgabe 4: Ammoniak-Maser $\boxed{\textbf{3 Punkte}}$

Das Ammoniak-Molekül kann verwendet werden, um einen Maser (microwave amplification by stimulated emission of radiation) zu erzeugen. Das Molekül hat die Form einer Pyramide, mit den drei Wasserstoffatomen als Basis und dem Stickstoffatom an der Spitze. Im Gleichgewichtszustand befindet sich das N-Atom auf einer Höhe $z_0 \approx 0.4\,\text{Å}$ über der x, y-Ebene, welche von den drei Wasserstoffatomen aufgespannt wird. Zur Vereinfachung soll nur die Bewegung des N-Atoms entlang der z-Achse betrachtet werden.

(a) Skizzieren Sie das Potential $V(z)$, welches von der Coulomb-Abstossung zwischen dem Stickstoffatom und den drei Wasserstoffatomen entsteht. Berücksichtigen Sie dabei die Spiegelsymmetrie $z \to -z$.

(b) Wenn die Potentialbarriere bei $z = 0$ unendlich hoch wäre, dann wäre der Grundzustand zweifach entartet. Skizzieren Sie die Wellenfunktionen des Grundzustandes $\psi_\uparrow(z)$ und $\psi_\downarrow(z)$, welche einer hohen Wahrscheinlichkeit entsprechen, das Teilchen jeweils bei $z = +z_0$ und $z = -z_0$ zu finden.
In Wirklichkeit ist die Potentialbarriere endlich. Diskutieren Sie wie die Wellenfunktionen $\psi_\uparrow(z)$ und $\psi_\downarrow(z)$ sich dementsprechend ändern.

(c) Geben Sie die Schrödingergleichung für die Bewegung in z-Richtung an. Argumentieren Sie, dass die Energieeigenfunktionen (anti)symmetrische Linearkombinationen $\psi_\pm(z) = (\psi_\uparrow(z) \pm \psi_\downarrow(z))/\sqrt{2}$ sind. Solche Zustände haben leicht unterschiedliche Energien. Aus Experimenten findet man, dass $\Delta E = E_- - E_+ \approx 10^{-4}\,\text{eV}$.

(d) Schreiben Sie die zeitabhängige Wellenfunktion des Grundzustandes als

$$\Psi(z,t) = C_+\psi_+(z)e^{-iE_+t/\hbar} + C_-\psi_-(z)e^{-iE_-t/\hbar} \tag{1}$$

und gehen Sie davon aus, dass sich das Stickstoffatom bei $t = 0$ im Zustand $\psi_\uparrow(z)$ befindet. Wie viel Zeit braucht das Stickstoffatom um den *invertierten* Zustand $\psi_\downarrow(z)$ zu besetzen?

Es ist möglich, ausschliesslich $\psi_\downarrow(z)$-Zustände auszulesen, indem man die entgegengesetzen Dipolmomente der Zustände $\psi_\uparrow(z)$ und $\psi_\downarrow(z)$ ausnutzt und ein inhomogenes elektrisches Feld verwendet. Nach dieser Inversion der Besetzung der Zustände kann induzierte Emission von Photonen zusammen mit Übergänge von $\psi_\downarrow(z)$ nach $\psi_\uparrow(z)$ stattfinden.