Moderne Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. Jaquier, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 6

Ausgabe: 21.12.18 – Abgabe: 18.01.19 bis 11:00 Uhr – Besprechung: 22.01.19

Aufgabe 1: Plötzliche Störung — 3 Punkte

Der Hamilton-Operator eines eindimensionalen harmonischen Oszillators in einem konstanten äusseren elektrischen Feld lautet:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + eFx = H_0 + V(x),$$

wobei $V(x) = eFx$ ist. Die Eigenzustände von H_0 sind über die bekannten Auf- und Absteigeoperatoren a und $a^\dagger$ gegeben.

(a) Betrachten Sie die Operatoren

$$A = a + \frac{g}{\hbar\omega} \quad , \quad A^\dagger = a^\dagger + \frac{g}{\hbar\omega},$$

mit $g = eF\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$. Schreiben Sie H in Abhängigkeit von A und $A^\dagger$. Zeigen Sie, dass A und $A^\dagger$ die gleichen Kommutationsrelationen wie a und $a^\dagger$ erfüllen und geben Sie mithilfe dieser Operatoren eine Basis von Eigenzuständen von H an.

(b) Das äussere elektrische Feld werde nun plötzlich ausgeschaltet, so dass der Hamilton-Operator durch H_0 gegeben ist. Betrachten Sie einen Eigenzustand $|n\rangle$ von H und geben Sie in niedrigster Ordnung die Wahrscheinlichkeiten für Übergänge von $|n\rangle$ zu den Eigenzuständen von H_0.

(c) Was erwarten Sie, wenn das elektrische Feld stattdessen adiabatisch heruntergefahren wird?

Aufgabe 2: Änderung der Feinstrukturkonstante — 2 Punkte

Experimente mit Atomuhren haben eine obere Schranke für eine mögliche zeitliche Änderung der Feinstrukturkonstante α zu

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = (-1.6 \pm 2.3) \times 10^{-17}$$

pro Jahr ergeben [1]. Gehen Sie von einer Zeitabhängigkeit von der Form $\alpha(t) = at+b$ aus und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Wasserstoffatom

[1] T. Rosenband; et al. (2008). “Frequency Ratio of Al+ and Hg+ Single-Ion Optical Clocks;

aufgrund dieser Abhängigkeit innerhalb eines Jahres vom $1S$- im $2S$-Zustand übergeht, in niedrigster Ordnung in adiabatischer Störungstheorie. Aufgrund der kleinen Änderungsrate von α kann dabei die Energie der einzelnen Niveaus in dieser Zeitspanne als konstant betrachtet werden.
Wie viele Atome müssen betrachtet werden, um einen solchen Übergang mit nicht vernachlässigbarer Wahrscheinlichkeit ($\sim 50\%$) innerhalb eines Jahres zu beobachten?

Aufgabe 3: Photon Impuls — 3 Punkte

Elektromagnetische Felder haben die Energie $H_{\mathrm{EMF}} = \int d^3\vec{r}\,\frac{\vec{E}^2+\vec{B}^2}{8\pi}$. Da die Felder eine Richtung haben, gibt es ein durch den Poynting-Vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$ gekennzeichneter Energiefluss. Der zugehörige Impuls,

$$\vec{P}_{\mathrm{EMF}} = \int d^3\vec{r}\,\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{4\pi c}\ , \tag{1}$$

wird in dieser Aufgabe identifiziert mit der Summe der Impulse der individuellen Photonen.

(a) Schreiben Sie das Vektorpotential $\vec{A}$ durch Fourierkomponenten, genau so wie in den Vorlesungen, und berechnen Sie damit

$$\vec{P}_{\mathrm{EMF}} = \frac{V}{4\pi c^2} \sum_{\vec{k},\lambda} \omega_k \vec{k} \left[b_{\lambda,\vec{k}} b^*_{\lambda,\vec{k}} + b^*_{\lambda,\vec{k}} b_{\lambda,\vec{k}} \right]\ . \tag{2}$$

(b) Folgen Sie den Schritten in der Vorlesung zur Quantisierung der elektromagnetischen Felder. Zeigen Sie damit, dass der Impulsoperator durch

$$\hat{\vec{P}}_{\mathrm{EMF}} = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\vec{k}\, a^\dagger_{\lambda,\vec{k}} a_{\lambda,\vec{k}} \tag{3}$$

gegeben ist.

(c) Konstruieren Sie einen (normierten) Zustand mit einem Photon. Lassen Sie den Operator in Gleichung (3) darauf wirken und berechnen Sie die Eigenwerte. Führen Sie das gleiche aus für einen Zustand mit n identischen Photonen.

Metrology at the 17th Decimal Place". Science, 319 (5871): 1808–12. Siehe auch R. Srianand; et al. (2004). "Limits on the Time Variation of the Electromagnetic Fine-Structure Constant in the Low Energy Limit from Absorption Lines in the Spectra of Distant Quasars". Physical Review Letters. 92 (12): 121302. arXiv:astro-ph/0402177 und Yasunori, F. (2004). "Oklo Constraint on the Time-Variability of the Fine-Structure Constant". Astrophysics, Clocks and Fundamental Constants. Lecture Notes in Physics. Springer Berlin. pp. 167–185.

Aufgabe 4: Feinstrukturübergang **2 Punkte**

In den Vorlesungen wurde die Übergangsrate

$$w(2p \to 1s) = \frac{2^{17}}{3^{11}} \frac{e^2 a_B^2 \omega^3}{\hbar c^3} \approx 0.63 \cdot 10^9 \ \mathrm{s}^{-1} \tag{1}$$

im Wasserstoffatom hergeleitet, wobei $\hbar\omega = E_{2p} - E_{1s}$ die Energiedifferenz zwischen den Niveaus ist. Unter Berücksichtigung der Lamb-Verschiebung spalten zwei Feinstruktur-Niveaus im Wasserstoff, $2s_{1/2}$ und $2p_{1/2}$, sich auf.

(a) Berechnen Sie die Übergangsrate $w(2s_{1/2} \to 2p_{1/2})$. Es sei gegeben, dass $\Delta E = E_{2s_{1/2}} - E_{2p_{1/2}} = 4.4 \cdot 10^{-6}\mathrm{eV}$. Hinweis: Schauen Sie zurück auf Übungsblatt 2, Aufgabe 1(e).

(b) Das numerische Resultat für die Übergangsrate ist

$$w(2s_{1/2} \to 2p_{1/2}) \approx 0.81 \cdot 10^{-9} \ \mathrm{s}^{-1} \ . \tag{2}$$

Was ist der Grund, dass dieser Übergang viele Größenordnungen langsamer erfolgt wie der Übergang $2p \to 1s$?