Moderne Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. Jaquier, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 5

Ausgabe: 14.12.18 – Abgabe: 21.12.18 bis 11:00 Uhr – Besprechung: 08.01.19

Aufgabe 1: Streuung an einer Sphäre — 3 Punkte

Betrachten Sie die Streuung von S-Wellen an einer Sphäre, welche durch das Potential $U(r) = \alpha\delta(r-R)$ gegeben ist. Es soll gezeigt werden, dass die Streuung resonant ist wenn die Energie des Streuzustandes vergleichbar mit einem Niveau des quasidiskreten Spektrums (für endliche Werte von α) innerhalb der Sphäre ist. Dabei sei $\chi(r) = rR(r)$, wobei $R(r)$ die radiale Wellenfunktion ist.

(a) Verwenden Sie für $\chi(r)$ im Bereich $r > R$ einen Ansatz aus Kugelwellenfunktionen $\chi(r) = S_0 e^{ikr} - e^{-ikr}$. Lösen Sie die Schrödingergleichung für χ im Bereich $r < R$ und bestimmen Sie S_0 indem Sie beide Wellenfunktionen bei $r = R$ anschliessen. Interpretieren Sie S_0 als die Streuphase $e^{2i\delta_0}$.

(b) Für welche Werte von α finden Sie die Streuphase $\delta_0 \sim -kR$ für die Streuung an einer harten Kugel? Für welche Werte $k \sim k_n$ erwarten Sie eine Abweichung von diesem Verhalten?

(c) Setzen Sie nun $k = k_n + \gamma$ mit $|\gamma| \ll 1$ und zeigen Sie, dass die Streuamplitude S_0 für grosse Werte von α durch den Ausdruck

$$S_0 \simeq e^{-2ikR}\frac{E - E_{R,n} - i\frac{\Gamma_{R,n}}{2}}{E - E_{R,n} + i\frac{\Gamma_{R,n}}{2}}$$

angenähert werden kann. Behalten Sie dabei Terme bis zur Ordnung $\frac{1}{\alpha}$. Interpretieren Sie Ihr Resultat für $E_{R,n}$. Zeigen Sie, dass der totale Wirkungsquerschnitt für $E \sim E_{R,n}$ die Form

$$\sigma_0 \propto \frac{\Gamma_{R,n}^2}{(E - E_{R,n})^2 + \frac{\Gamma_{R,n}^2}{4}}$$

hat. Dies ist die Form einer Breit-Wigner Verteilung, welche die Energieabhängigkeit des Wirkunsquerschnitts in der Nähe von Resonanzen beschreibt (siehe Bild). Die Zerfallsbreite $\Gamma_{R,n}$ entspricht dabei der inversen Lebensdauer des gebundenen Zustands (sie könnte auch aus der Wahrscheinlichkeit für den gebundenen Zustand, aus der Sphäre rauszutunneln, berechnet werden).

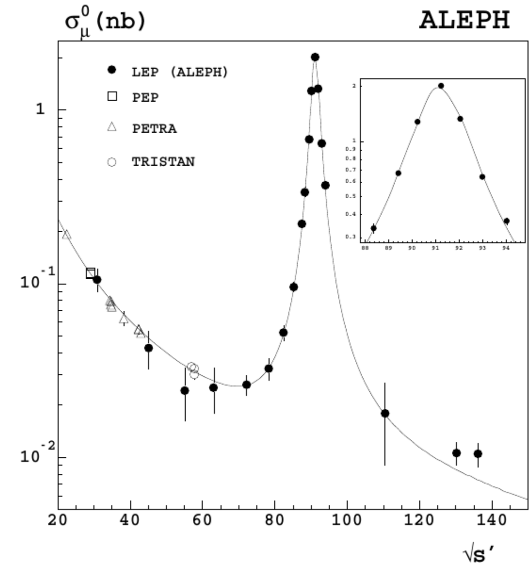

Abbildung 1: Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts für die Produktion eines Z-Bosons mit anschliessendem Zerfall nach Muonen. Das Maximum liegt bei der Z-Masse $m_Z \simeq 91$GeV.

Aufgabe 2: Resonanzstreuung bei niedrigen Energien **2 Punkte**

Eine besondere Behandlung ist dann erforderlich, wenn im diskreten Spektrum eines anziehenden Potentials ein s-Zustand existiert mit einer (negativen) Energie ϵ, welche gegenüber der Stärke des Potentials innerhalb von dessem Wirkungsbereich R klein ist.

(a) Sei $R(r)$ der radiale Anteil der Wellenfunktion. Schreiben Sie (für $l = 0$) für die Funktion $\chi(r) = rR(r)$ in der Bereichen $r < R$ und $r > R$ und für $E \sim \epsilon$ jeweils die Schrödingergleichung in der geeigneten Näherung auf.

(b) Da sich $\chi_{r>R}$ für kleine r nur wenig ändert, können beide Lösungen $\chi_{r<R}$ und $\chi_{r>R}$ formal bei $r = 0$ angeschlossen werden. Sei $-\kappa = \lim_{r\to 0} \frac{\chi'}{\chi}$ die entsprechende Randbedingung. Was lässt sich über die Energieabhängigkeit von κ sagen? Lösen Sie die Gleichung für $\chi_{r>R}$ für $E = -|\epsilon|$ und bestimmen Sie κ in Abhängigkeit von $|\epsilon|$.

(c) Lösen Sie nun die Gleichung für $\chi_{r>R}$ für die freie Bewegung bei niedrigen Energien ($kR \gg 1$), wobei E nicht klein gegenüber ϵ zu sein braucht. Verwenden Sie die Randbedingung κ um die Streulänge zu berechnen. Bestimmen Sie daraus die Streuamplitude und den totalen Wirkungsquerschnitt σ und verifizieren Sie, dass σ im Resonanzbereich $E \sim |\epsilon|$ gross wird.

Aufgabe 3: Greensche Funktion **3 Punkte**

In der Vorlesung wurde die Greensche Funktion

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{1}$$

für die Schrödingergleichung hergeleitet.

(a) Kontrollieren Sie explizit, dass $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ die Differenzialgleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - E\right)G(\vec{r},\vec{r}\,') = \delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{2}$$

löst.

Beachten Sie, dass $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ nicht die einzige Lösung der Differenzialgleichung (2) ist. In der Tat ist die Summe $G(\vec{r},\vec{r}\,')+G_0(\vec{r},\vec{r}\,')$ auch eine Lösung, für jede Lösung $G_0(\vec{r},\vec{r}\,')$ der homogenen Differenzialgleichung $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - E\right)G_0(\vec{r},\vec{r}\,') = 0$.

(b) Eine andere Lösung $\widetilde{G}(\vec{r},\vec{r}\,')$ der Differenzialgleichung (2) folgt aus der Vorschrift, beide Pole in der Fourier-transformierten Greenschen Funktion in die obere Halbebene zu verschieben, d.h. $\ell^2-k^2 \to (\ell-(k+i0))(\ell-(-k+i0))$. Leiten Sie daraus her, dass

$$\widetilde{G}(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{\cos(k|\vec{r}-\vec{r}\,'|)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\ . \tag{3}$$

(c) Zeigen Sie, dass diese andere Vorschrift sich auf genau eine andere Wahl von $G_0(\vec{r},\vec{r}\,')$ beläuft. Warum benutzen wir Gleichung (1) in Streuungsexperimente, obwohl Gleichungen (1) und (3) in diese Sinne äquivalent sind?

Aufgabe 4: Wirkungsquerschnitt für Yukawa Potenzial **2 Punkte**

Betrachten Sie Streuung von schnellen Teilchen am Yukawa Potenzial

$$U(r) = U_0\frac{e^{-r/R}}{r}\ . \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass für sphärisch symmetrische Potenziale die Streuamplitude in der ersten Ordnung Bornscher Näherung durch

$$f(\vartheta) = -\frac{2m}{\hbar^2 q}\int_0^\infty dr'\ r'\sin(qr')V(r') \tag{2}$$

gegeben ist, wobei $q = 2k\sin(\vartheta/2)$.

(b) Berechnen Sie die Streuamplitude $f(\vartheta)$ für das Yukawa Potenzial.

(c) Berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt $\sigma(E) = \int d\Omega\,|f(\vartheta)|^2$.