Moderne Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. Jaquier, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 4

Ausgabe: 30.11.18 – Abgabe: 07.12.18 bis 11:00 Uhr – Besprechung: 11.12.18

Aufgabe 1: Linearer Stark-Effekt im Wasserstoffatom $\boxed{\textbf{2 Punkte}}$

Im Wasserstoffatom kann es zu einem linearen Stark-Effekt kommen, weil es entartete Zustände gibt, welche ein nichtverschwindendes Matrixelement

$$\langle nlm|\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{d}|nl'm'\rangle$$

für die Wechselwirkung zwischen dem Dipolmoment $\vec{d}$ des Atoms und dem äusseren konstanten elektrischen Feld $\vec{\mathcal{E}}$ haben. In diesem Argument wurde die Spin-Bahn-Kopplung des Elektrons vernachlässigt in der Annahme, dass die dadurch hervorgerufene Aufspaltung der Energieniveaus viel kleiner ist als die vom Elektrischen Feld verursachten Effekte.

(a) Geben Sie für $n = 2$ an, welche Zustände $|nlm\rangle$ in Abwesenheit einer Spin-Bahn-Kopplung durch die Störung $\vec{\mathcal{E}}\cdot\vec{d}$ gemischt werden. Tun Sie das Gleiche für den Fall, in dem man eine Spin-Bahn-Kopplung hat und geben Sie an, inwiefern die Entartung der Zustände durch die Kopplung aufgehoben wird.

(b) Schätzen Sie die Stärke der externen elektrischen Felder ab, für die die Vernachlässigung der Spin-Bahn-Kopplung gerechtfertigt ist.

Aufgabe 2: Zeeman-Effekt und Hyperfeinstruktur $\boxed{\textbf{3 Punkte}}$

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom in einem externen konstanten Magnetfeld $\vec{B}$. Das Atom befinde sich im Grundzustand, wobei die Wechselwirkung zwischen den Spins des Elektrons und des Kerns eine Hyperfein-Aufspaltung des Energieniveaus um $\Delta_1 - \Delta_0 = \Delta_{HF}$ verursacht. Fassen Sie diese Wechselwirkung sowie die Wechselwirkung zwischen dem Elektron und dem äusseren Magnetfeld als Störung auf und berechnen Sie die Energieverschiebung in erster Ordnung in Abhängigkeit von $\Delta_{0,1}$ und $\vec{B}$. Betrachten Sie dabei sowohl den Fall von starken ($\Delta_{\mathrm{HF}} \ll \mu_B|B|$) und schwachen ($\Delta_{\mathrm{HF}} \gg \mu_B|B|$) externen Magnetfeldern.

Hinweis: Verwenden Sie Störungstheorie für entartete Zustände. Die Korrektur erster Ordnung für die Energie der entarteten Zustände ist dabei durch die Eigenwerte der Störung in der ungestörten Basis des entarteten Unterraums gegeben.

Aufgabe 3: Streuung an einer unendlich harten Kugel $\boxed{\textbf{5 Punkte}}$

In dieser Aufgabe berechnen wir den Wirkungsquerschnitt $\sigma(k)$ für ein ebene Welle mit Impuls $\hbar k$ am Potenzial

$$U(r) = \begin{cases} +\infty & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases} \tag{1}$$

mithilfe die Methode der Partialwellen. Wie bekannt, ist die allgemeine Lösung der radialen Wellenfunktion für $r > R$ durch

$$R_\ell(k,r) = A_\ell(k) j_\ell(kr) + B_\ell(k) n_\ell(kr) \tag{2}$$

gegeben, wobei $j_\ell(x)$ und $n_\ell(x)$ die sphärische Bessel- und Neumann-Funktionen sind. (Siehe nächste Aufgabe für deren Definitionen und Eigenschaften.)

(a) Zeigen Sie, dass die Lösung der radialen Schrödingergleichung für $r > R$ als

$$R_\ell(k,r) = C_\ell(k) \left[j_\ell(kr) \cos\delta_\ell(k) - n_\ell(kr) \sin\delta_\ell(k) \right] \tag{3}$$

geschrieben werden kann, sodass für $r \to \infty$

$$R_\ell(k,r) \overset{r\to\infty}{\simeq} \frac{C_\ell(k)}{kr} \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell(k) \right) . \tag{4}$$

(b) Aus Gleichung (4) wurde hergeleitet, dass

$$\sigma(k) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2\delta_\ell(k) . \tag{5}$$

Bestimmen Sie die Phase $\delta_\ell(k)$ aus der Randbedingung bei $r = R$ und drücken Sie damit $\sigma(k)$ durch Bessel- und Neumann-Funktionen aus.

(c) Berechnen Sie $\sigma(k)$ im Limes von kleinen Energien ($kR \ll 1$).

(d) Berechnen Sie $\sigma(k)$ im Limes von großen Energien ($kR \gg 1$). Hinweis: Führen Sie die Summe über partielle Wirkungsquerschnitte σ_ℓ aus bis zu $\ell_{\max} \simeq kR$.

(e) Vergleichen Sie die Resultate in Aufgaben (c) und (d) mit dem klassischen Resultat $\sigma = \pi R^2$. Für welche Energie hätten Sie Übereinstimmung erwartet?

Aufgabe 4: Radiale Wellenfunktion $\boxed{\textbf{Fakultativ}}$

(a) Zeigen Sie, dass zwei Lösungen $R_\ell(k,r)$ der radialen Schrödingergleichung,

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) R_\ell(k,r) = 0 \ , \tag{1}$$

durch die sphärische Bessel- und Neumann-Funktionen $j_\ell(kr)$ und $n_\ell(kr)$ gegeben sind. Diese sind definiert als

$$j_\ell(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^\ell (n+\ell)!}{n!(2(n+\ell)+1)!} u^{2n+\ell} , \tag{2}$$

$$n_\ell(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+\ell+1}(2n-1)!!}{(2n)!(2n-1-2\ell)!!} u^{2n-\ell-1} . \tag{3}$$

(b) Diese können durch bekannte Funktionen ausgedrückt werden. Zeigen Sie, dass für $\ell = 0$ gilt

$$j_0(u) = \frac{\sin u}{u} \ , \quad n_0(u) = -\frac{\cos u}{u} . \tag{4}$$

und dass die Funktionen für $\ell > 0$ mithilfe von

$$j_{\ell+1}(u) = \frac{\ell}{u} j_\ell(u) - j'_\ell(u) \ , \quad n_{\ell+1}(u) = \frac{\ell}{u} n_\ell(u) - n'_\ell(u) \tag{5}$$

berechnet werden können.

(c) Zeigen Sie, dass für $u \to 0$ gilt

$$j_\ell(u) = \frac{2^\ell \ell!}{(2\ell+1)!} u^\ell \big(1 + \mathcal{O}(u^2)\big) \ , \quad n_\ell(u) = -\frac{(2\ell)!}{2^\ell \ell!} u^{-\ell-1} \big(1 + \mathcal{O}(u^2)\big) . \tag{6}$$

(d) Beweisen Sie mit Induktion, dass für $u \to \infty$ gilt

$$j_\ell(u) = \frac{\sin(u - \frac{\ell\pi}{2})}{u} + \mathcal{O}(1/u^2) \ , \quad n_\ell(u) = -\frac{\cos(u - \frac{\ell\pi}{2})}{u} + \mathcal{O}(1/u^2) . \tag{7}$$

(e) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der Schrödingergleichung eines freien Teilchen für $r \to \infty$ durch eine Linearkombination von ein- und auslaufende Kugelwellen gegeben ist,

$$\psi(\vec{r}) \overset{r\to\infty}{\simeq} A(k,\vartheta,\varphi)\frac{e^{ikr}}{r} + B(k,\vartheta,\varphi)\frac{e^{-ikr}}{r} , \tag{8}$$

mit unbekannten Funktionen A und B.

(f) Argumentieren Sie, dass die Wellenfunktion $\psi_{\text{out}}(\vec{r})$, welche aus der Streuung an einem zentralen Potenzial entstanden ist, für $r \to \infty$ als

$$\psi_{\text{out}}(\vec{r}) \overset{r\to\infty}{\simeq} f(\vartheta)\frac{e^{ikr}}{r} \tag{9}$$

geschrieben werden kann, mit unbekannten $f(\vartheta)$.