Moderne Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. Jaquier, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 3

Ausgabe: 16.11.18 – Abgabe: 23.11.18 bis 11:00 Uhr – Besprechung: 27.11.18

Aufgabe 1: Teilchen im magnetischen Feld $\boxed{\textbf{2 Punkte}}$

Ein geladenes spinloses Teilchen bewegt sich in einem konstanten homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\hat{e}_z$.

(a) Mit der Wahl $\vec{A} = Bx\hat{e}_y$ des Vektorpotenzials wurde in der Vorlesung gezeigt dass p_y und p_z erhalten sind. Geben Sie eine Interpretation dieser Erhaltungsgrößen.

(b) Betrachten Sie die Wahl $\vec{A} = -\frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{B})$, und zeigen Sie dass

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \omega L_z + \frac{m}{2}\omega^2(x^2 + y^2)\,, \tag{1}$$

wobei $\omega = eB/(2mc)$. Welche Operatoren kommutieren mit H? Geben Sie eine Interpretation dieser Resultate.

Aufgabe 2: Teilchen im elektromagnetischen Feld $\boxed{\textbf{2 Punkte}}$

Ein geladenes spinloses Teilchen bewegt sich in einem konstanten homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\hat{e}_z$, sowie einem senkrecht darauf stehenden elektrischen Feld $\vec{E} = E\hat{e}_x$.

(a) Wählen Sie das Vektorpotenzial $\vec{A} = Bx\hat{e}_y$ und bestimmen Sie die Zustände $\psi(\vec{x})$ (im Sinne von Eigenfunktionen $H(x)$ eines eindimensionalen harmonischen Oszillators) sowie die zugehörigen Energien E.

Aufgabe 3: Effekt der endliche Kerngröße $\boxed{\textbf{3 Punkte}}$

Betrachten Sie ein Elektron im elektrostatischen Feld des Atomkerns mit Ladung Ze. Nehmen Sie an, dass die Ladung des Atomkerns gleichmäßig über einer Kugel mit Radius R verteilt ist, sodass das Potenzial durch

$$U(r) = \begin{cases} \frac{Ze^2}{2R}\left(\frac{r^2}{R^2} - 3\right)\,, & r \leq R \\ -\frac{Ze^2}{r}\,, & r > R \end{cases} \tag{1}$$

gegeben ist. Betrachten Sie $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - Ze^2/r$ als ungestörten Hamiltonian, und die Differenz zwischen $U(r)$ und dem Coulomb Potenzial als Störung.

(a) Zeigen Sie, dass die Energie sich in erster Ordnung in der Störung um

$$\Delta E_{n,\ell} = \frac{Ze^2}{2R} \int_0^R dr\ r^2 \left[R_{n\ell}(r)\right]^2 \left(\frac{r^2}{R^2} - 3 + \frac{2R}{r}\right) \tag{2}$$

ändert, wobei $R_{n\ell}(r)$ die radiale Wellenfunktion des Wasserstoffatoms ist.

(b) Schätzen Sie $\Delta E_{n,\ell}$ für kleine Radien R des Atomkerns. Hinweis: bestimmen Sie das Grenzverhalten $R_{n\ell}(r \approx 0)$ aus der radialen Differentialgleichung.

(c) Zeigen Sie, dass insbesondere für die s-Orbitale folgendes gilt:

$$\Delta E_{n,0} = \frac{2Z^4 e^2 R^2}{5a^3 n^3}\,, \tag{3}$$

wobei $a = \frac{\hbar^2}{me^2}$ der Bohrradius ist. Hinweis: die wichtige Formel

$$\left|\Psi_{n\ell m}\big(\vec{r} = \vec{0}\big)\right|^2 = \frac{\delta_{\ell,0} Z^3}{\pi a^3 n^3} \tag{4}$$

kann dabei nützlich sein[1].

Aufgabe 4: Feynman–Hellmann Theorem — 3 Punkte

Betrachten Sie normalisierte stationäre Zustände mit Energie

$$E = \langle \Psi | H | \Psi \rangle\,, \tag{1}$$

und nehmen Sie an, dass der Hamilton-Operator sowie die Energie von einem Parameter λ abhängig ist.

(a) Beweisen Sie das Feynman–Hellmann Theorem:

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = \langle \Psi | \frac{\partial H}{\partial \lambda} | \Psi \rangle\,. \tag{2}$$

(b) Als Beispiele, berechnen Sie mithilfe von Gleichung (2) die Erwartungswerte:
(i) $\langle 1/r \rangle$ für das Wasserstoffatom;
(ii) $\langle T \rangle$ für den eindimensionalen harmonischen Oszillator;
(iii) $\langle U \rangle$ für den eindimensionalen harmonischen Oszillator.
Vergleichen Sie Ihre Resultate mit dem Virialsatz.

---

[1] Um diese Formel zu beweisen, verwenden Sie den Ausdruck für die radiale Wellenfunktion,

$$R_{n\ell}(r) = \sqrt{\left(\frac{2Z}{na}\right)^3 \frac{(n-\ell-1)!}{2n(n+\ell)!}}\ e^{-\rho/2}\, \rho^\ell\, L^{2\ell+1}_{n-\ell-1}(\rho)\,, \quad \text{mit } \rho = \frac{2Z}{na} r\,,$$

$$L^q_p(x) = \frac{e^x x^{-q}}{p!} \frac{d^p}{dx^p}\left(e^{-x} x^{p+q}\right) \quad \text{(zugeordneten Laguerre-Polynome)}\,.$$