WiSe 2018

Moderne Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. Jaquier, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 2

Ausgabe: 02.11.18 – Abgabe: 09.11.18 bis 11:00 Uhr – Besprechung: 13.11.18

Aufgabe 1: Elektron mit Spin und Bahndrehimpuls 4+2 Punkte

Wir betrachten ein Elektron mit Bahndrehimpuls $\ell = 1$ und Spin $s = \frac{1}{2}$.

(a) 1 Punkt Eine Zustandsbasis ist durch die Eigenzustände $|\ell, m_\ell; s, m_s\rangle = |\ell, m_\ell\rangle \otimes |s, m_s\rangle$ gegeben. Wie viel Eigenzustände gibt es in diesem Fall? Wie wirkt der Gesamtdrehimpulsoperator $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ auf diese Zustände? Zeigen Sie, dass diese Zustände keine Eigenzustände der Spin-Bahn-Kopplung $H_{\text{int}} = \vec{L} \cdot \vec{S}$ sind.

(b) 1 Punkt Eine neue Basis von Zuständen

$$|j, m; \ell, s\rangle = \sum_{m_\ell, m_s} C^{j\,m}_{\ell\, m_\ell\, s\, m_s} |\ell, m_\ell; s, m_s\rangle \tag{1}$$

sind Eigenzustände von $\vec{J}^2, J_z, \vec{L}^2$ und $\vec{S}^2$ sowie H_{int}. Konstruieren Sie die neue Basis von Zuständen mit Hilfe der Auf- und Absteigeoperatoren sowie die Bedingung von Orthogonalität der Zustände. Vergleichen Sie Ihr Resultat für die Clebsch-Gordan Koeffizienten $C^{j\,m}_{\ell\, m_\ell\, s\, m_s}$ mit Abbildung 1.

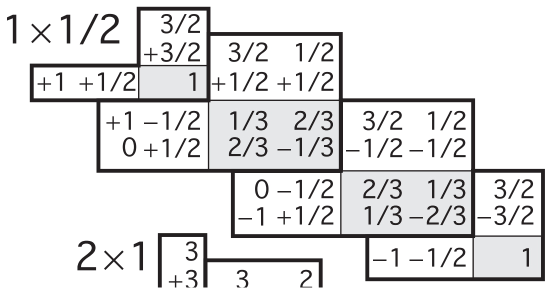

Abbildung 1: Clebsch-Gordan Koeffiziente (ohne Wurzel).

(c) 1 Bonus Punkt Beweisen Sie die Orthogonalitätsbedingungen

$$\sum_{m_1, m_2} C^{j'\,m'}_{j_1\, m_1\, j_2\, m_2} C^{j\,m}_{j_1\, m_1\, j_2\, m_2} = \delta_{j'j}\delta_{m'm}, \tag{2}$$

$$\sum_{j, m} C^{j\,m}_{j_1\, m_1\, j_2\, m_2} C^{j\,m}_{j_1\, m_1'\, j_2\, m_2'} = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'} \tag{3}$$

und rechnen Sie damit zum Beispiel $C^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}_{1\,0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}$ nach.

(d) $\boxed{\text{1 Bonus Punkt}}$ Beweisen Sie die Rekursionsbeziehungen

$$\mu_+(j,m)C^{j\,m+1}_{j_1\,m_1\,j_2\,m_2} = \mu_-(j_1,m_1)C^{j\,m}_{j_1\,m_1-1\,j_2\,m_2} + \mu_-(j_2,m_2)C^{j\,m}_{j_1\,m_1\,j_2\,m_2-1}, \tag{4}$$

$$\mu_-(j,m)C^{j\,m-1}_{j_1\,m_1\,j_2\,m_2} = \mu_+(j_1,m_1)C^{j\,m}_{j_1\,m_1+1\,j_2\,m_2} + \mu_+(j_2,m_2)C^{j\,m}_{j_1\,m_1\,j_2\,m_2+1} \tag{5}$$

und rechnen Sie damit zum Beispiel $C^{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}}_{1\,1\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}}$ nach.

(e) $\boxed{\text{1 Punkt}}$ Jetzt betrachten wir die zu $|\ell, m_\ell; s, m_s\rangle$ sowie $|j, m; \ell, s\rangle$ gehörige Wellenfunktionen. Zeigen Sie, dass

$$\Psi_{\ell\,m_\ell\,s\,m_s}(\vartheta,\varphi) = Y_{\ell\,m_\ell}(\vartheta,\varphi)\,\chi_{s\,m_s} \tag{6}$$

wobei $Y_{\ell\,m_\ell}(\vartheta,\varphi)$ die Kugelflächenfunktionen sind, und $\chi_{s\,m_s}$ die Spinoren

$$\chi_{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \chi_{\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Zeigen Sie, dass die Wellenfunktionen $\Psi_{j\,m\,\ell\,s}(\vartheta,\varphi)$ durch

$$\Psi_{\frac{3}{2}\,m\,1\,\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{m}{3}}\,Y_{1\,m-\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi)\\ \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{m}{3}}\,Y_{1\,m+\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi)\end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\Psi_{\frac{1}{2}\,m\,1\,\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix}-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{m}{3}}\,Y_{1\,m-\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi)\\ \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{m}{3}}\,Y_{1\,m+\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi)\end{pmatrix} \tag{9}$$

gegeben sind.

(f) $\boxed{\text{1 Punkt}}$ Wie sieht die Darstellung der Operatoren L_z, S_z und J_z (wirkend auf die Wellenfunktionen) aus? Kontrollieren Sie die Eigenwerte von J_z wirkend auf $\Psi_{\frac{3}{2}\,m\,1\,\frac{1}{2}}(\vartheta,\varphi)$.

Aufgabe 2: Dzyaloshinski-Moriya Wechselwirkung $\boxed{\textbf{3 Punkte}}$

In gewissen Festkörpern wird die Wechselwirkung zwischen benachbarten Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen durch den folgenden Hamilton-Operator beschrieben:

$$H = A(\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2) + \vec{B}\cdot[\vec{\sigma}_1\times\vec{\sigma}_2], \tag{1}$$

wobei die Zahl A und der Vektor $\vec{B}$ materialabhängige Konstanten sind.

(a) $\boxed{\text{1 Punkt}}$ Zeigen Sie, dass der zweite Term im Hamilton-Operator nicht mit dem Gesamtspin $\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$ kommutiert. Schliessen Sie daraus, dass die in der Vorlesung eingeführte Gesamtdrehimpulsbasis

$$|1,\pm1\rangle = |\tfrac{1}{2},\pm\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2},\pm\tfrac{1}{2}\rangle \tag{2}$$

$$|1,0\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle + |\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle\right) \tag{3}$$

$$|0,0\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle - |\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle\right) \tag{4}$$

für die Beschreibung dieses Problems keine geeignete Basis ist.

(b) 1 Punkt Zeigen Sie, dass die Wirkung des zweiten Terms im Hamilton-Operator auf der Gesamtdrehimpulsbasis gegeben ist durch

$$\vec{B}\cdot[\vec{\sigma}_1\times\vec{\sigma}_2]|1,\pm1\rangle = 0, \tag{5}$$

$$\vec{B}\cdot[\vec{\sigma}_1\times\vec{\sigma}_2]|1,0\rangle = 2iB|0,0\rangle, \tag{6}$$

$$\vec{B}\cdot[\vec{\sigma}_1\times\vec{\sigma}_2]|0,0\rangle = -2iB|1,0\rangle. \tag{7}$$

wobei $B = |\vec{B}|$.

(c) 1 Punkt Verwenden Sie die obigen Ergebnisse, um eine Basis aus Eigenzuständen des Hamilton-Operators zu bestimmen. Geben Sie auch die dazugehörigen Energieeigenwerte an.

Aufgabe 3: Vektormodell — 3 Punkte

Unter einem Vektoroperator versteht man ein Operator $\vec{V}$ mit der folgenden Eigenschaft:

$$[J_i, V_j] = i\epsilon_{ijk}V_k. \tag{1}$$

Dabei ist $\vec{J}$ der Drehimpulsoperator, welcher selbst ein Vektoroperator ist.
Das in der Vorlesung eingeführte Vektormodell besagt, dass alle Matrixelemente von Vektoroperatoren bezüglich einer Basis $|\alpha jm\rangle$ von Eigenzuständen des Drehimpulses proportional zum Matrixelement des Drehimpulsoperators sind,

$$\langle\alpha jm'|\vec{V}|\alpha jm\rangle \propto \langle\alpha jm'|\vec{J}|\alpha jm\rangle. \tag{2}$$

Das Symbol α bezeichnet dabei allfällige zusätzliche Quantenzahlen (Energie,...) mit denen die Basis vollständig festgelegt ist. Im Folgenden wird das Vektormodell auf zwei unterschiedliche Arten bewiesen.

(a) 1 Punkt Wie in der Vorlesung besprochen, lässt sich mit Hilfe des Wigner-Eckhart-Theorems die folgende Identität aufschreiben:

$$\langle\alpha jm'|\vec{V}|\alpha jm\rangle = \frac{\langle\alpha j|V|\alpha j\rangle}{\langle\alpha j|J|\alpha j\rangle}\langle\alpha jm'|\vec{J}|\alpha jm\rangle. \tag{3}$$

Zeigen Sie nun, dass

$$\langle\alpha jm'|\vec{J}\cdot\vec{V}|\alpha jm\rangle = \frac{\delta_{m'm}}{2j+1}\langle\alpha j|V|\alpha j\rangle\langle\alpha j|J|\alpha j\rangle. \tag{4}$$

Verwenden Sie dieses Resultat, um das Verhältnis aus reduzierten Matrixelementen $\frac{\langle\alpha j|V|\alpha j\rangle}{\langle\alpha j|J|\alpha j\rangle}$ zu bestimmen und schliessen Sie auf das Endergebnis

$$\langle\alpha jm'|\vec{V}|\alpha jm\rangle = \frac{\langle\alpha jm'|\vec{J}\cdot\vec{V}|\alpha jm\rangle}{j(j+1)}\langle\alpha jm'|\vec{J}|\alpha jm\rangle. \tag{5}$$

(b) $\boxed{\text{2 Punkte}}$

i) Berechnen Sie für ein Vektoroperator $\vec{V}$ und dem Drehimpulsoperator $\vec{J}$ die folgenden Kommutatoren:

$$[J^2, V_i] = -i\epsilon_{jik}(J_jV_k + V_kJ_j) \tag{6}$$
$$[J^2,[J^2,V_i]] = 2(J^2V_i + V_iJ^2) - 4J_i(J\cdot V) \tag{7}$$

ii) Werten Sie nun das Matrixelement

$$\langle\alpha jm'|[J^2,[J^2,V_i]]|\alpha jm\rangle \tag{8}$$

auf zweierlei Arten aus und finden Sie erneut die Aussage des Vektormodells.