Moderne Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. Jaquier, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 1

Ausgabe: 19.10.18 – Abgabe: 26.10.18 bis 11:00 Uhr – Besprechung: 30.10.18

Aufgabe 1: Projektionsoperator

3 Punkte

Sei H ein Hamilton-Operator mit einem Diskreten Spektrum von Eigenwerten a_n und den entsprechenden Eigenvektoren $|\psi_n^i\rangle$:

$$H|\psi_n^i\rangle = a_n|\psi_n^i\rangle \quad , \quad 1 \le i \le g_n,$$

wobei g_n der Entartungsgrad des jeweiligen Eigenwertes ist. Man definiert nun den Operator

$$P_n = \sum_{i=1}^{g_n} |\psi_n^i\rangle\langle\psi_n^i|.$$

(a) Zeigen Sie, dass P_n hermitesch ist.

(b) Zeigen Sie, dass P_n einen beliebigen Zustand $|\varphi\rangle$ auf den Unterraum H_n projiziert, welcher durch die Eigenvektoren zum Eigenwert a_n aufgespannt wird.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von P_n.

Aufgabe 2: Auf- und Abstiegsoperatoren

3 Punkte

Gegeben sind die Kugelflächenfunktionen für $l = 1$:

$$Y_{10}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta \quad , \quad Y_{1\pm1}(\vartheta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta e^{\pm i\varphi},$$

sowie die Auf- und Abstiegsoperatoren

$$L_\pm = e^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\vartheta} + i\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass $L_+Y_{11} = 0$ wie erwartet.

(b) Wenden Sie L_- wiederholt auf Y_{11} an und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Ausdrücken für Y_{10} und Y_{1-1}.

Aufgabe 3: Spinprojektion $\boxed{\textbf{2 Punkte}}$

Wir betrachten ein Elektron, dessen Bahndrehimpuls wir hier vernachlässigen. Eine Basis des Zustandraumes wird gebildet von den gemeinsamen Eigenvektoren vom quadrierten Spinoperator S^2 und der Projektion des Spins auf der z-Achse S_z:

$$|\pm\rangle_z = |\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle_z \quad , \quad S_z|\pm\rangle_z = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle_z .$$

Der Spinoperator ist dabei durch $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ gegeben, wobei $\vec{\sigma}$ die Pauli-Matrizen sind. Das Elektron befinde sich nun im Zustand $|+\rangle_z$. Betrachten Sie die Projektion $\vec{S} \cdot \vec{n}$ des Spins auf einem Einheitsvektor

$$\vec{n} = (\sin\vartheta \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\vartheta \sin\varphi \vec{e}_y + \cos\vartheta \vec{e}_z).$$

Geben Sie die möglichen Messwerte dieser Observablen an sowie die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Aufgabe 4: Drehoperator im $j = 1$ Hilbertraum $\boxed{\textbf{2 Punkte}}$

Die Eigenvektoren für $j = 1$ können durch drei Vektoren dargestellt werden:

$$|1,1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \ , \quad |1,0\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \ , \quad |1,-1\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \ . \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Matrixdarstellung der Generatoren von Rotationen in diesem Fall durch

$$J_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \ J_y = \frac{1}{i\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}, \ J_z = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \tag{2}$$

gegeben sind. Diese Matrizen erfüllen die Vertauschungsrelationen $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$, genau wie die 3×3 Matrizen S_i aus Vorlesung 1. Warum sind die J_i und S_i unterschiedlich?

(b) Der Rotationsoperator um die Achse $\vec{n}$ um den Winkel α ist durch

$$U_{\vec{n},\alpha} = \exp(-i\alpha\vec{J} \cdot \vec{n}) \tag{3}$$

gegeben. Vereinfachen Sie diesen Ausdruck zu

$$U_{\vec{n},\alpha} = \mathbb{I} - i\sin\alpha\, \vec{J} \cdot \vec{n} - (1 - \cos\alpha)(\vec{J} \cdot \vec{n})^2 \ . \tag{4}$$

Aufgabe 5 ist fakultativ.

Aufgabe 5: Abstrakte Eigenfunktion **3 Bonuspunkte**

Betrachten Sie für ganzzahlige ℓ die Wellenfunktion,

$$\Psi_\ell(\vec{r}) = d_{i_1 i_2 \cdots i_\ell} r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_\ell} \ , \tag{1}$$

wobei $d_{i_1 i_2 \cdots i_\ell}$ ein absolut symmetrischer Tensor von Rang ℓ bezeichnet, welcher Spurlos ($d_{i\,i\,j \cdots k} = 0$) ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\Psi_\ell(\vec{r})$ eine Eigenfunktion von $\vec{L}^2$ ist, und bestimmen Sie die Eigenwerte.

(b) Wie viele unabhängige Komponenten hat der Tensor $d_{i_1 i_2 \cdots i_\ell}$?

(c) Sei $\ell = 1$. Finden Sie explizite Ausdrücke für die drei Tensoren von Rang 1, $d_i^{(-1)}$, $d_i^{(0)}$ und $d_i^{(1)}$, sodass $\Psi_1(\vec{r}) = d_i^{(m)} r_i$ proportional zu den Kugelflächenfunktionen Y_{1m} sind.