

Vorlesung 22

Relativistische Gleichungen

Die Schrödingergleichung ist unter Lorentz-Transformationen nicht invariant, weil sie eine Differentialgleichung erster Ordnung in der Zeit und zweiter Ordnung in \vec{r} ist. Falls wir die Schrödingergleichung so umschreiben wollen, dass Invarianz unter Lorentz-Transformationen gilt, müssen t und \vec{r} in der Schrödingergleichung gleichgestellt sein.

Wie das möglich ist, wird klar, wenn wir die Schrödingergleichung als Dispersionsrelation,

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m}, \quad (1)$$

für ein freies nicht-relativistisches Teilchen betrachten, und dann die Ersetzung

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\partial} \quad (2)$$

vornehmen. Wir bekommen dann die übliche Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\partial}^2 \Psi. \quad (3)$$

Wir können genau das Gleiche für ein relativistisches Teilchen machen. Die relativistische Dispersionsrelation lautet

$$E = \sqrt{c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4}. \quad (4)$$

Wenn wir Gl. (2) noch ein mal verwenden, bekommen wir folgende Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \sqrt{-c^2 \hbar^2 \vec{\partial}^2 + m^2 c^4} \Psi. \quad (5)$$

Das Auftreten der Wurzel eines Differentialoperators bedeutet, dass diese Gleichung nicht lokal ist und das wollen wir nicht. Deswegen versuchen wir, die Dispersionsrelation in Gl. (4) erst umzuschreiben

$$E^2 = c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4, \quad (6)$$

und danach Gl. (2) zu verwenden. Wir erhalten dann

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Psi = 0. \quad (7)$$

Diese Gleichung nennt man Klein-Gordon-Gleichung. Wir sehen, dass wir für $m = 0$ eine Wellengleichung bekommen.

Die Lösungen der Klein-Gordon-Gleichungen sind ebene Wellen

$$\Psi(t, \vec{r}) \sim e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)/\hbar}, \quad (8)$$

wobei

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (9)$$

Die zwei Lösungen mit positiven aber auch mit *negativen* Energien muss man irgendwie interpretieren, weil die Existenz von negativen Energien bedeutet, dass es keinen Grundzustand im System gibt, sodass das Quantensystem nicht stabil ist.

Wir sehen auch, dass die Klein-Gordon-Gleichung andere Randbedingungen braucht; man muss nicht nur die Wellenfunktion zu einem bestimmten Zeitpunkt kennen, sondern auch die Zeitableitung der Wellenfunktion. Demzufolge ist

$$\int d^3\vec{r} |\Psi(t, \vec{r})|^2 \quad (10)$$

nicht mehr zeitunabhängig, sodass die Interpretation von $|\Psi(t, \vec{r})|^2$ als eine Wahrscheinlichkeitsdichte nicht mehr möglich ist.

Trotzdem kann man natürlich versuchen, die Klein-Gordon-Gleichung für die Beschreibung relativistischer Effekte im Wasserstoffatom zu verwenden. Dies funktioniert, indem man das elektrostatische Potential so einführt

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\phi(\vec{r}), \quad (11)$$

mit $\phi(\vec{r}) = -e/r$. Wenn man die entsprechende Gleichung löst, bekommt man relativistische Korrekturen zum Energiespektrum des Wasserstoffatoms, die aber mit dem Experiment nicht übereinstimmen. Das passiert, teilweise, weil der Spin des Elektrons für relativistische Korrekturen eine wichtige Rolle spielt, wie wir bei der Diskussion der Fein- und Hyperfeinstruktur des Atomspektrums gesehen haben. Die Klein-Gordon-Gleichung beschreibt aber ein skalares (Spin-0) Teilchen.

Ganz allgemein ist es wichtig zu verstehen, dass wir eine relativistische Quantentheorie mit der Schrödingergleichung und der Idee, dass die Wellenfunktion die Wahrscheinlichkeit beschreibt, ein Teilchen an einem bestimmten Ort zu finden, nicht konstruieren können. Das passiert, weil die Relativitätstheorie uns sagt, dass – falls genug Energie vorhanden ist – neue Teilchen erzeugt werden können. Wenn aber wirklich neue Teilchen erzeugt werden, kann man nicht mehr sagen, dass man die Wellenfunktion zur Beschreibung eines Teilchens verwendet; man muss die Wellenfunktion als ein Quantenfeld interpretieren.

Wir können die Voraussetzungen für den Übergang von Quantenmechanik zur Quantenfeldtheorie bestimmen. Falls wir ein Teilchen mit der Masse m erzeugen wollen, brauchen wir die Zeit

$$\Delta t \sim \frac{\hbar}{mc^2}. \quad (12)$$

Weil ein Lichtsignal nur mit endlicher Geschwindigkeit propagiert, können wir die Koordinate des erzeugten Teilchens nicht genauer als

$$\Delta x \sim \Delta t c \sim \frac{\hbar}{mc} \quad (13)$$

messen. Die Größe auf der rechten Seite ist die Compton-Wellenlänge des Teilchens

$$\lambda = \frac{\hbar}{mc}. \quad (14)$$

D.h. Falls wir die Koordinate des Teilchens besser als λ wissen wollen, sollen wir uns mit dem Erzeugungsmechanismus des Teilchens zu beschäftigen und das benötigt Quantenfeldtheorie.

Man kann das Argument umdrehen. Falls wir die Koordinate des Teilchens besser als λ messen wollen, ist die Impulsunschärfe

$$\Delta p \sim \frac{\hbar}{\lambda} \sim mc. \quad (15)$$

Diese Impulsunschärfe bedeutet, dass es auch große Energien gibt

$$\Delta E \sim \Delta pc \sim mc^2, \quad (16)$$

die zur Erzeugung zusätzlicher Teilchen führen. Falls das passiert, können wir unser Quantensystem nicht mehr als Einteilchensystem betrachten.

Wir wollen jetzt versuchen, die Probleme der Klein-Gordon-Gleichung zu reduzieren. Das wird uns nicht wirklich gelingen, aber wir werden zu interessanten Ergebnissen kommen und so die sogenannte Dirac-Gleichung erhalten. Unsere Forderung ist, dass wir eine relativistische Differentialgleichung haben wollen, die von erster Ordnung in t ist. Wir schreiben sie als

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H\Psi. \quad (17)$$

Wir fordern außerdem, dass Zeit und Raum in der Gleichung gleichgestellt sind; das bedeutet, dass H *linear* im Impulsoperator ist

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + mc^2\beta. \quad (18)$$

Damit bleiben die vier Konstanten $\alpha_{x,y,z}$ und β , die wir noch bestimmen müssen.

Um diese Konstanten zu bestimmen, berechnen wir $E^2 = H^2$ und fordern, dass wir die relativistische Relation Gl. (6) zwischen E , \vec{p} und m erhalten. Wir schreiben

$$\begin{aligned} H^2 = E^2 &= c^2\vec{p}^2 + m^2c^4 = (c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + mc^2\beta)(c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + mc^2\beta) \\ &= c^2(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})^2 + mc^3(\beta\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \vec{\alpha} \cdot \vec{p}\beta) + m^2c^4\beta^2. \end{aligned} \quad (19)$$

D.h. wir brauchen

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})^2 = \vec{p}^2, \quad (\beta\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \vec{\alpha} \cdot \vec{p}\beta) = 0, \quad \beta^2 = 1. \quad (20)$$

Es ist klar, dass wir diese Gleichungen nicht mit Zahlen erfüllen können. Zum Beispiel bedeutet die zweite Gleichung, dass β mit $\vec{\alpha} \cdot \vec{p}$ anti-kommutieren muss. Die einfachsten mathematischen Objekte, die nicht miteinander kommutieren, sind Matrizen. Deswegen wollen wir versuchen, $\vec{\alpha}$ und β als Matrizen zu interpretieren. Es folgt aus Gl. (20), dass diese vier Matrizen die folgenden Bedingungen erfüllen müssen

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}, \quad \beta\alpha_i + \alpha_i\beta = 0, \quad \beta^2 = 1, \quad i = x, y, z. \quad (21)$$

Man kann beweisen, dass diese Bedingungen nur mit 4×4 Matrizen erfüllt werden können. Diese Matrizen kann man folgendermaßen wählen¹

$$\beta = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

wobei $\sigma_{x,y,z}$ die Pauli-Matrizen sind.

Zudem können wir auch die sogenannten Dirac-Matrizen einführen

$$\gamma^0 = \beta, \quad \vec{\gamma} = \beta \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

Statt Gl. (21) erfüllen Dirac-Matrizen $\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma})$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (24)$$

wobei der metrische Tensor $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ist.

Wir können die Dirac-Gleichung mit γ -Matrizen schreiben. Wir fangen mit der Gleichung

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} - mc^2\beta \right) \Psi = 0 \quad (25)$$

an, multiplizieren diese Gleichung mit β von links, dividieren durch \hbar und erhalten

$$\left(i \left[\gamma^0 \frac{\partial}{c\partial t} + \vec{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right] - \frac{mc}{\hbar} \right) \Psi = 0. \quad (26)$$

Um diese Gleichung in relativistische Notation umzuschreiben, führen wir einen Vierer-Vektor $x^\mu = (ct, \vec{r})$ ein, sodass die Ableitung nach x^μ so aussieht

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right). \quad (27)$$

Die Dirac-Gleichung können wir dann so schreiben

$$\left[i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar} \right] \Psi = \left[i\hat{\partial} - \frac{mc}{\hbar} \right] \Psi = 0. \quad (28)$$

Weil die Dirac-Gleichung eine Matrix-Gleichung ist, muss die Wellenfunktion Ψ vier Komponenten haben

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Dieses Objekt nennt man einen Spinor.

Es ist interessant, dass aus dieser Konstruktion eine Wellenfunktion herauskommt, die mehr als eine Komponente hat. Das ist wichtig, um Spin-1/2 Teilchen zu beschreiben.

¹Wir schreiben 4×4 Matrizen durch 2×2 Blockmatrizen.

Für Spin-1/2 Teilchen braucht man zwei und nicht vier Komponenten. Was die anderen Komponenten bedeuten, werden wir in der nächsten Vorlesung diskutieren.

Wenn wir die Kopplung zwischen Dirac-Teilchen und einem externen elektromagnetischen Feld beschreiben wollen, führen wir die Vektorpotentiale in die Gleichung folgendermaßen ein

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu. \quad (30)$$

Diese Art von Kopplung (die minimale Kopplung) respektiert die Eichinvarianz und ist deswegen sehr wichtig.