Vorlesung 19

Zusätzliche Aspekte der Absorbtion und Emission von Photonen

Plancksche Verteilung und thermisches Gleichgewicht: Wir betrachten ein Medium aus Atomen. Die Atome wechselwirken nicht direkt miteinander, können aber Photonen absorbieren und abstrahlen. Wir nehmen an, dass es zwei Atomzustände gibt, die Energien $E_>$ (Zustand A) und $E_<$ (Zustand B) haben, wobei $E_> > E_<$ gelte.

Ein Atom kann ein Photon mit der Energie $\hbar\omega_k = E_> - E_<$ abstrahlen und von Zustand A nach Zustand B übergehen. Ein Atom kann aber auch ein Photon mit der Energie $\hbar\omega_k$ absorbieren und von Zustand B nach Zustand A übergehen. Die Zahl von Atomen im Zustand A ist N_A und im Zustand B, N_B.

Die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit, dass ein Atom im Zustand A mit der Energie $E_>$ ein Photon mit der Energie $\hbar\omega_k$ abstrahlt und in den Zustand B übergeht ist $W_{A\to B}$; die Wahrscheinlichkeit des inversen Prozesses ist $W_{B\to A}$. Die Zahl der Atome in den Zuständen A und B ändert sich gemäß den folgenden Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}N_A}{\mathrm{d}t} = -W_{A\to B}N_A + W_{B\to A}N_B, \quad \frac{\mathrm{d}N_B}{\mathrm{d}t} = -W_{B\to A}N_B + W_{A\to B}N_A, \tag{1}$$

Falls sich die Atome im Gleichgewicht befinden, sodass N_A und N_B zeitunabhängig sind, erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}N_{A,B}}{\mathrm{d}t} = 0 \;\Leftrightarrow\; -W_{A\to B}N_A + W_{B\to A}N_B = 0. \tag{2}$$

Das bedeutet, dass die Zahlen von Atomen und die Wahrscheinlichkeiten der Absorption bzw. Abstrahlung von Photonen im Gleichgewicht die folgende Gleichung erfüllen

$$W_{A\to B}N_A = W_{B\to A}N_B. \tag{3}$$

In realistischen Atomen gibt es natürlich viel mehr als zwei verschiedene Zustände; für ein *volles* Gleichgewicht brauchen wir, dass Gl. (3) für jedes Paar von Zuständen erfüllt ist.

Falls das Atomgas die Temperatur T hat, ist die Zahl an Atomen in den beiden Zuständen durch die Boltzmann-Formel gegeben

$$\frac{N_A}{N_B} = e^{-(E_> - E_<)/(k_BT)} = e^{-\hbar\omega_k/(k_BT)}. \tag{4}$$

Wir erhalten dann aus den Gln. (3,4) das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{W_{B\to A}}{W_{A\to B}} = e^{-\frac{\hbar\omega_k}{k_BT}}. \tag{5}$$

Wir haben die Wahrscheinlichkeiten, ein Photon abzustrahlen oder zu absorbieren, in der vorletzten Vorlesung berechnet. Dabei haben wir gesehen, dass

$$\begin{aligned} W_{B\to A} &\sim |\mathcal{M}|^2 \sim |\langle n_{\vec{k},\lambda} - 1, E_> | ... a_{\vec{k},\lambda} | n_{\vec{k},\lambda}, E_<\rangle|^2 \sim \left(\sqrt{n_{\vec{k},\lambda}}\right)^2 \sim n_{\vec{k},\lambda}, \\ W_{A\to B} &\sim |\mathcal{M}|^2 \sim |\langle n_{\vec{k},\lambda} + 1, E_> | ... a^\dagger_{\vec{k},\lambda} | n_{\vec{k},\lambda}, E_<\rangle|^2 \sim \left(\sqrt{n_{\vec{k},\lambda} + 1}\right)^2 \sim n_{\vec{k},\lambda} + 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Wir nehmen an, dass $\omega_k = c|\vec{k}|$ und dass es $n_{\vec{k},\lambda}$ Photonen im Gleichgewicht gibt. Dann erhalten wir

$$W_{B\to A} = C n_{\vec{k},\lambda}, \quad W_{A\to B} = C\left(n_{\vec{k},\lambda} + 1\right), \tag{7}$$

wobei C in beiden Gleichungen *identisch* ist, sodass

$$\frac{W_{B\to A}}{W_{A\to B}} = \frac{n_{\vec{k},\lambda}}{n_{\vec{k},\lambda} + 1}. \tag{8}$$

Wir benutzen dann Gl. (5) und erhalten

$$\frac{n_{\vec{k},\lambda}}{n_{\vec{k},\lambda} + 1} = e^{-\frac{\hbar\omega_k}{k_B T}}. \tag{9}$$

Jetzt können wir nach $n_{\vec{k},\lambda}$ auflösen und bekommen die Zahl der Photonen im jeweiligen Quantenzustand

$$n_{\vec{k},\lambda} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1}. \tag{10}$$

Außerdem können wir die Zahl von Photonen mit gegebener Energie berechnen. Wir erhalten die berühmte Plancksche Formel[1]

$$n_{\omega_k} = n_{\vec{k},\lambda}\, 2\, \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}V}{(2\pi)^3} = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 \mathrm{d}\omega}{e^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1}. \tag{11}$$

Wir können die Gesamtenergie der Photonen berechnen

$$E = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega E_\omega n_\omega = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3 \mathrm{d}\omega}{e^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1} = \frac{V k_B^4 T^4 \pi^4}{15\pi^2 c^3 \hbar^3} \tag{12}$$

Das entspricht dem Stefan-Boltzmann Gesetz

$$\frac{E}{V} = \left(\frac{k_B^4 \pi^2}{15 c^3 \hbar^3}\right) T^4. \tag{13}$$

Der Laser. Wir können jetzt das Prinzip des Lasers diskutieren. Wir betrachten Atome mit zwei Energiezustände A und B, mit $E_A > E_B$. Wie wir aus Gl.(4) sehen, sind im Normalfall mehr Atome im B-Zustand als im A-Zustand. Falls eine elektromagnetische Welle mit der Energie $\hbar\omega = E_A - E_B$ durch das Atomgas läuft, findet induzierte Absorbtion und Emission statt. Die Intensität der Welle ändert sich wie

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \sim W_{AB} N_A - W_{BA} N_B \sim n_\omega \left(N_A - N_B\right) < 0. \tag{14}$$

Wenn wir wollen, dass die Intensität der Welle zunimmt, brauchen wir $N_A > N_B$, d.h. eine "inverse" Population der Atome. Beachten Sie, dass in diesem Fall $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t \sim n_\omega$ ist, d.h.

[1] Der Faktor 2 steht für zwei mögliche Photonpolarisationen.

je mehr Photone in der Welle sind, desto schneller nimmt die Intensität der Welle zu. Um die inverse Population der Atome zu bekommen, benutzen wir Atome mit drei Zuständen $E_B < E_A < E_C$ und einer bestimmten Ordnung von Übergangswahrscheinlichkeiten $W_{AB} \ll W_{CA}$, $W_{CB} \ll W_{CA}$. Im Normalfall befinden sich die Atome im Grundzustand B. Wir schicken eine Welle mit der Energie $E_C - E_A$ durch das Gas; induzierte Absorbtion führt zu Übergänge $A \to C$ (optisches Pumpen) und dann, dank der Ordnung der Wahrscheinlichkeiten, bekommen wir viele Atome im Zustand C, die dann im Zustand A übergehen, und in diesem Zustand lange Zeit bleiben. Falls wir jetzt eine Welle mit der Energie $E_A - E_B$ durch das Gas laufen lassen, bekommen wir, dank der induzierten Emission, die Verstärkung der Intensität der Welle.

Der Photoeffekt: Eine wichtige Rolle in der Erkenntnis, dass das Licht aus Photonen besteht, hat der sogenannte Photoeffekt gespielt. Unter dem Photoeffekt versteht man, dass Licht ein gebundenes Elektron aus seiner Bindung “herausschlagen” kann. In Quantenmechanik besteht Licht aus Photonen. Deswegen erklärt man den Photoeffekt als die Absorbtion eines Photons durch ein gebundenes Elektron im Atom; die Absorbtion des Photons erhöht die Energie des Elektrons, sodass am Ende das Elektron wegfliegen kann.

Der Zusammenhang zwischen der Energie des Photons, der Bindungsenergie des Atoms und der kinetischen Energie des auslaufenden Elektrons ist

$$\hbar\omega = E_b + \frac{\vec{p}^2}{2m}. \tag{15}$$

Wir werden den Photoeffekt im Limes

$$E_b \ll \hbar\omega \ll m_e c^2 \tag{16}$$

untersuchen. In diesem Limes ist die Energie des Elektrons im Endzustand groß genug, um die Coulombsche Wechselwirkung zu vernachlässigen und klein genug, um das Elektron als nicht-relativistisch zu betrachten.

Wir benutzen Fermis goldene Regel und schreiben die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit als

$$\frac{\mathrm{d}W_{fi}}{T} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|\hat{V}|i\rangle|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega) \frac{V\mathrm{d}\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{17}$$

Der Anfangszustand ist

$$|i\rangle = |i_A\rangle \otimes |\vec{k}, \lambda\rangle, \tag{18}$$

wobei $|i_A\rangle$ der Anfangszustand des Elektrons im Atom und $|\vec{k}, \lambda\rangle$ der Zustand des einlaufenden Photons ist. Der Endzustand $|f\rangle = |\vec{p}_e\rangle$ ist das auslaufende Elektron. Die Wellenfunktion in diesem Fall ist

$$|\vec{p}_e\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}_e \cdot \vec{r}}. \tag{19}$$

Das Störpotential hat die Form

$$V = -\frac{e}{mc}\vec{p}\cdot\vec{A}, \quad \vec{A}(\vec{r}) = \sum_{\lambda,\vec{k}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega}}\vec{e}_{\lambda,\vec{k}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} a_{\lambda,\vec{k}}. \tag{20}$$

Dann,

$$\langle f|V|i\rangle = -\frac{e}{mc}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega}}\langle\vec{p}_e|\vec{e}_{\lambda,\vec{k}}\cdot\vec{p}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}|i_A\rangle. \tag{21}$$

Der Fluss der Photonen ist $j = c/V$, sodass der Wirkungsquerschnitt

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}W_{fi}}{Tj} = \frac{4\pi^2\alpha\hbar}{m^2\omega}|\langle\vec{p}_e|\vec{e}_{\lambda,\vec{k}}\cdot\vec{p}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}|i\rangle|^2\ \frac{Vp_e\ m\mathrm{d}\Omega_e}{(2\pi\hbar)^3} \tag{22}$$

lautet. Der Impuls des Elektrons ist durch folgende Formel gegeben

$$p_e = \sqrt{2m(\hbar\omega + |E_b|)} \approx \sqrt{2m\hbar\omega}. \tag{23}$$

Wir werden nun die Ladung des Kerns Z als freien Parameter betrachten. Die Wellenfunktion des Elektrons im Grundzustand ist ähnlich zur Wellenfunktion im Wasserstoffatom

$$\psi_i(\vec{r}) = \sqrt{\frac{Z^3}{\pi a_B^3}}\ e^{-Zr/a_B}. \tag{24}$$

Damit berechnen wir das Matrixelement

$$\begin{aligned}\langle\vec{p}_e|\vec{e}_{\lambda,\vec{k}}\cdot\vec{p}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}|i\rangle &= \sqrt{\frac{1}{V}}\vec{e}_{\lambda,\vec{k}}\cdot\vec{p}_e\sqrt{\frac{Z^3}{\pi a_B^3}}\int \mathrm{d}\vec{r}e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}e^{-Zr/a_B} \\ &= \sqrt{\frac{64\pi Z^5}{a_B^5 V}}\frac{\vec{e}_{\lambda,\vec{k}}\cdot\vec{p}_e}{\left(Z^2/a_B^2 + \vec{q}^2\right)^2},\end{aligned} \tag{25}$$

wobei $\vec{q} = \vec{p}_e/\hbar - \vec{k}$. Wir erhalten dann

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\lambda}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha}{m^2\omega}\frac{p_e m}{2\pi\hbar^2}\frac{64\pi Z^5}{a_B^5}\frac{|\vec{e}_{\lambda,\vec{k}}\cdot\vec{p}_e|^2}{\left(Z^2/a_B^2 + \vec{q}^2\right)^4}. \tag{26}$$

Gl. (26) ergibt den Wirkungsquerschnitt für Photonen mit bestimmter Polarisation.

Wir berechnen dann $\vec{q}^2$

$$\vec{q}^2 = \left(\frac{\vec{p}_e}{\hbar} - \vec{k}\right)^2 = \frac{\vec{p}_e^2 + \hbar^2\vec{k}_e^2 - 2\hbar\vec{k}\vec{p}_e}{\hbar^2}. \tag{27}$$

Wir können diesen Ausdruck vereinfachen, weil $\hbar|\vec{k}|/p_e \ll 1$ ist. In der Tat gilt

$$\hbar\omega = \hbar|\vec{k}|c = \frac{p_e^2}{2m} \Rightarrow \frac{\hbar|\vec{k}|}{p_e} = \frac{p_e}{2m_e c} = \frac{v_e}{2c} \ll 1, \tag{28}$$

weil das Elektron nicht-relativistisch ist. Es folgt aus Gl. (27), dass

$$\vec{q}^2 \approx \frac{p_e^2}{\hbar^2} = \frac{2m\omega}{\hbar}. \tag{29}$$

Wir können dann Gl. (26) weiter vereinfachen, da

$$Z^2/a_B^2 + \vec{q}^2 \approx \frac{Z^2}{a_B^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\,\hbar\omega = \frac{Z^2 e^2}{a_B}\,\frac{1}{a_B e^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\,\hbar\omega. \tag{30}$$

Jetzt benutzen wir, dass

$$a_B = \frac{\hbar^2}{me^2} \quad \text{und} \quad \hbar\omega \gg \frac{Z^2 e^2}{a_B}, \tag{31}$$

und erreichen

$$Z^2/a_B^2 + \vec{q}^2 \approx q^2 \approx \frac{2m\omega}{\hbar}. \tag{32}$$

Falls unser Lichtstrahl nicht polarisiert ist, müssen wir über zwei mögliche Polarisationen mitteln. Das bedeutet

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=\pm}\frac{\mathrm{d}\sigma_\lambda}{\mathrm{d}\Omega}. \tag{33}$$

Diese Summe ist einfach zu berechnen, wenn wir die folgende Formel nutzen

$$\sum_{\lambda=\pm} = \vec{e}^{\,i}_{\lambda,\vec{k}}\,\vec{e}^{\,*j}_{\lambda,\vec{k}} = \delta^{ij} - n^i n^j, \tag{34}$$

wobei $\vec{n} = \vec{k}/|\vec{k}|$ ist. Der Wirkungsquerschnitt ist dann proportional zu

$$p_e^i p_e^j \left(\delta^{ij} - n^i n^j\right) = p_e^2 \sin^2\theta, \tag{35}$$

wenn wir $\vec{n} = \vec{e}_z$ wählen. Wir setzen dann alles zusammen und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{16\alpha\hbar}{m\omega}\left(\frac{Z\hbar}{a_B p_e}\right)^5 \sin^2\theta, \tag{36}$$

wobei $p_e = \sqrt{2m\hbar\omega}$ ist. Es folgt, dass der Wirkungsquerschnitt des Photoeffektes zu folgenden Größen proportional ist

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \propto \sin^2\theta, \quad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \propto Z^5, \quad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \propto \omega^{-7/2}. \tag{37}$$