Vorlesung 17

Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

Wir wissen, dass man das elektromagnetische Feld als Wellen oder auch als Teilchen – die Photonen – beschreiben kann. Die Verbindung zwischen Wellen und Teilchen entsteht durch die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes. Die Idee ist eigentlich, das elektromagnetische Feld als ein "mechanisches" System mit vielen Freiheitsgraden darzustellen und dann ganz normale Quantisierungsregeln verwenden. Quantisierungsregeln bestehen darin, dass man die Hamiltonfunktion in Abhängigkeit von kanonischen Koordinaten und Impulsen schreibt und dann die Koordinaten und Impulse zu Operatoren befördert, die die Unschärferelation erfüllen sollen. Wir wollen jetzt dieses Programm für das elektromagnetische Feld durchführen.

Als erstes müssen wir die Eichung wählen. Die Eichinvarianz bedeutet, dass wir das Vektorpotential des Feldes gemäß $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu f$ modifizieren können, ohne die elektromagnetischen Felder und die Physik zu ändern. Nehmen wir zum Beispiel an, dass ein elektrisches Potential $\phi(\vec{r},t)$ gegeben sei. Ein neues Potential ist dann

$$\phi'(t,\vec{r}) = \phi(t,\vec{r}) + \partial_t f. \tag{1}$$

Wir wählen dann $f = -\int^{t} \mathrm{d}\tau \phi(\tau,\vec{r})$ und bekommen

$$\phi' = 0. \tag{2}$$

Dann ist das elektrische Feld

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t} \tag{3}$$

und weil $\vec{\partial}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$, wobei ρ die Ladungsdichte ist, und weil wir das elektromagnetische Feld im ladungsfreien Raum betrachten, gilt

$$\vec{\partial}\cdot\vec{E} \sim \vec{\partial}\cdot\vec{A} = 0. \tag{4}$$

Das heisst, unser elektromagnetisches Feld beschreiben wir mit einen Vektorpotential $A^\mu = (0,\vec{A})$ unter der Bedingung $\vec{\partial}\cdot\vec{A} = 0$.

Wir schreiben $\vec{A}$ durch Fourierkomponenten. Normalerweise macht man das mit Integralen, aber wir werden hier Reihen verwenden. Um das zu ermöglichen, stellen wir uns vor, dass unser Feld in einer Box mit periodischen Randbedingungen ist. Dann haben wir

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}} \left[\vec{b}_{\vec{k}}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \vec{b}^*_{\vec{k}}(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right], \tag{5}$$

weil $\vec{A}(t,\vec{r})$ natürlich reell ist. Die Summe läuft über die ganzen Zahlen n_x, n_y, n_z, die die Impulse beschreiben

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}\left(n_x, n_y, n_z\right). \tag{6}$$

Unsere Eichbedingung $\vec{\partial} \cdot \vec{A}$ bedeutet, dass

$$\vec{k} \cdot \vec{b}_{\vec{k}} = 0 \tag{7}$$

ist. Das heißt, dass der Vektor $\vec{b}_{\vec{k}}$ orthogonal zu $\vec{k}$ steht. Es gibt zwei solche Vektoren; wir bezeichnen sie als $\epsilon_\lambda(\vec{k})$, wobei $\lambda \in \{1,2\}$ die Polarisation bezeichnet. Diese Vektoren seien orthonormal, d.h.,

$$\epsilon^*_{\lambda'}(\vec{k}) \cdot \epsilon_\lambda(\vec{k}) = \delta_{\lambda\lambda'}. \tag{8}$$

Wir können die Polarisationsvektoren nun explizit konstruieren. Dazu betrachten wir ein Photon mit dem Impuls $\vec{k} = k\vec{e}_z$, also entlang der z-Achse. Wir können die Polarisationsvektoren so wählen, dass

$$\vec{\epsilon}_{\lambda=1} = \vec{e}_x, \qquad \vec{\epsilon}_{\lambda=2} = \vec{e}_y. \tag{9}$$

In diesem Fall sprechen wir von linearer Polarisation.

Andererseits können wir die Polarisationsvektoren auch folgendermaßen wählen

$$\vec{e}_{\lambda=+1} = -\frac{\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{2}}, \quad \vec{e}_{\lambda=-1} = \frac{\vec{e}_x - i\vec{e}_y}{\sqrt{2}}. \tag{10}$$

Dies entspricht zirkularer Polarisation; man nennt $\vec{e}_{\lambda=\pm1}$ die beiden Helizitätzustände.

Wir können für jeden Vektor $\vec{k}$ den Vektor $\vec{b}_{\vec{k}}$ als die lineare Kombinzation von $\epsilon_{\lambda,\vec{k}}$ schreiben

$$\vec{b}_{\vec{k}} = \sum_\lambda b_{\lambda,\vec{k}} \epsilon_{\lambda,\vec{k}}, \quad \vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda,\vec{k}} = 0. \tag{11}$$

Unsere Ziel ist die Zeitabhängigkeit von die Koeffizienten $b_{\lambda,\vec{k}}$ zu berechnen. Zu diesem Zweck, betrachten wir die Wellengleichung, welche das Vektorpotential in einem ladungsfreien Raum erfüllt

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}(t,\vec{r}) - \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2}\vec{A}(t,\vec{r}) = 0. \tag{12}$$

Wir setzen das durch Fourierkomponenten ausgedrückte Vektorpotential Gl. (5) in die obige Gleichung ein und erhalten

$$\frac{\partial^2 b_{\lambda,\vec{k}}}{\partial t^2} + c^2\vec{k}^2\, b_{\lambda,\vec{k}} = 0. \tag{13}$$

Wir finden

$$b_{\lambda,k} = e^{-i\omega_k t} b^{(0)}_{\lambda,k}, \tag{14}$$

wobei $\omega_{\vec{k}} = |\vec{k}|c$ ist. Das Vektorpotential lautet dann

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}} \left[b_{\lambda,\vec{k}}\, \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k})\, e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} + b^*_{\lambda,\vec{k}}\, \vec{\epsilon}^*_\lambda(\vec{k})\, e^{i\omega_k t - i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right], \tag{15}$$

Daraus können wir jetzt die Felder berechnen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t} = \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{i\omega_k}{c}\left[b_{\lambda,\vec{k}}\;\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k})\;e^{-i\omega_k t+i\vec{k}\cdot\vec{r}} - b^*_{\lambda,\vec{k}}\;\vec{\epsilon}^*_\lambda(\vec{k})\;e^{i\omega_k t-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right],\\
\vec{B} &= [\vec{\partial}\times\vec{A}(t,\vec{r})] = \sum_{\vec{k},\lambda} i\left[b_{\lambda,\vec{k}}\;[\vec{k}\times\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k})]\;e^{-i\omega_k t+i\vec{k}\cdot\vec{r}} - b^*_{\lambda,\vec{k}}\;[\vec{k}\times\vec{\epsilon}^*_\lambda(\vec{k})]\;e^{i\omega_k t-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right],
\end{aligned} \tag{16}$$

Wir sind jetzt bereit, die Energie des elektromagnetischen Feldes zu berechnen. Die Energie ist

$$H_{\mathrm{EMF}} = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\;\frac{\vec{E}^2+\vec{B}^2}{8\pi}. \tag{17}$$

Wir fangen mit dem elektrischen Feld an und erhalten

$$\begin{aligned}
\vec{E}^2 = \sum_{\vec{k},\lambda}\sum_{\vec{k}',\lambda'} \frac{i\omega_k}{c}\frac{i\omega_{k'}}{c} \times \Bigg[& b_{\lambda,\vec{k}}b_{\lambda',\vec{k}'}\;\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k})\cdot\vec{\epsilon}_{\lambda'}(\vec{k}')\;e^{-i(\omega_k+\omega_{k'})t+i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{r}} + c.c.\\
&- b_{\lambda,\vec{k}}b^*_{\lambda',\vec{k}'}\;\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k})\cdot\vec{\epsilon}^*_{\lambda'}(\vec{k}')\;e^{-i(\omega_k-\omega_{k'})t+i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}} + c.c.\Bigg].
\end{aligned} \tag{18}$$

Wir integrieren über $\vec{r}$ (wie in Gl. (17) gefordert). Dabei benutzen wir

$$\int \mathrm{d}^3\vec{r} e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}} = V\delta_{\vec{k},\vec{k}'}. \tag{19}$$

und bekommen ($\omega_{-\vec{k}} = \omega_{\vec{k}}$)

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^3\vec{r}\;\vec{E}^2 = -V \sum_{\vec{k},\lambda,\lambda'} \frac{\omega_k^2}{c^2}\Bigg[& b_{\lambda,\vec{k}}b_{\lambda',-\vec{k}}\;\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k})\cdot\vec{\epsilon}_{\lambda'}(-\vec{k})\;e^{-i2\omega_k t} + c.c.\\
&- b_{\lambda,\vec{k}}b^*_{\lambda',\vec{k}}\;\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k})\cdot\vec{\epsilon}^*_{\lambda'}(\vec{k}) + c.c.\Bigg]
\end{aligned} \tag{20}$$

Eine identische Rechnung für das magnetische Feld ergibt

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^3\vec{r}\;\vec{B}^2 = -V \sum_{\vec{k},\lambda,\lambda'} \Bigg[& b_{\lambda,\vec{k}}b_{\lambda',-\vec{k}}\;[\vec{k}\times\epsilon_\lambda(\vec{k})]\cdot[-\vec{k}\times\vec{\epsilon}_{\lambda'}(-\vec{k})]\;e^{-i2\omega_k t} + c.c.\\
&- b_{\lambda,\vec{k}}b^*_{\lambda',\vec{k}}\;[\vec{k}\times\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k})]\cdot[\vec{k}\times\vec{\epsilon}^*_{\lambda'}(\vec{k})] + c.c.\Bigg]
\end{aligned} \tag{21}$$

Weil

$$[\vec{k}\times\vec{a}]\cdot[\vec{k}\times\vec{b}] = \vec{k}^2\vec{a}\cdot\vec{b} - (\vec{k}\cdot\vec{a})(\vec{k}\cdot\vec{b}), \tag{22}$$

und weil $\vec{k} \cdot \epsilon_\lambda(\pm\vec{k}) = 0$, finden wir

$$\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\vec{B}^2 = -V \sum_{\vec{k},\lambda,\lambda'} \Bigg[- b_{\lambda,\vec{k}} b_{\lambda',-\vec{k}}\; \vec{k}^2 \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda'}(-\vec{k})\; e^{-i2\omega_k t} + c.c. \\ - b_{\lambda,\vec{k}} b^*_{\lambda',\vec{k}}\; \vec{k}^2 \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}^*_{\lambda'}(\vec{k}) + c.c. \Bigg] \tag{23}$$

Wir fügen Gl. (20) und (23) zusammen, benutzen die Orthogonalität der Polarisationsvektoren und bekommen $(\omega_k^2/c^2 = \vec{k}^2)$

$$\begin{aligned} H_{EMF} = \frac{V}{8\pi} \sum_{\vec{k},\lambda,\lambda'} \frac{\omega_k^2}{c^2} \Bigg[& - b_{\lambda,\vec{k}} b_{\lambda',-\vec{k}}\; \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda'}(-\vec{k})\; e^{-i2\omega_k t} + c.c. \\ & + b_{\lambda,\vec{k}} b^*_{\lambda',\vec{k}}\; \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}^*_{\lambda'}(\vec{k}) + c.c. \Bigg] \\ & + \frac{V}{8\pi} \sum_{\vec{k},\lambda,\lambda'} \Bigg[+ b_{\lambda,\vec{k}} b_{\lambda',-\vec{k}}\; \vec{k}^2 \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda'}(-\vec{k})\; e^{-i2\omega_k t} + c.c. \\ & + b_{\lambda,\vec{k}} b^*_{\lambda',\vec{k}}\; \vec{k}^2 \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}^*_{\lambda'}(\vec{k}) + c.c. \Bigg] \\ & = \frac{V}{4\pi c^2} \sum_{\vec{k},\lambda} \omega_k^2 \left[b_{\lambda,\vec{k}} b^*_{\lambda,\vec{k}} + b^*_{\lambda,\vec{k}} b_{\lambda,\vec{k}} \right]. \end{aligned} \tag{24}$$

Wir werden diesen Ausdruck so umschreiben, dass wir die Äquivalenz zum harmonischen Oszillator der Quantenmechanik sehen können. Wir führen zwei neue Variablen ein

$$Q_{\lambda,\vec{k}} = \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}} \left(b_{\lambda,\vec{k}} + b^*_{\lambda,\vec{k}} \right), \quad P_{\vec{k},\lambda} = i\omega_k \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}} \left(b_{\lambda,\vec{k}} - b^*_{\lambda,\vec{k}} \right). \tag{25}$$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$\omega_k^2 Q^2_{\vec{k},\lambda} + P^2_{\lambda,\vec{k}} = \frac{V\omega_k^2}{\pi c^2} b_{\lambda,\vec{k}} b^*_{\lambda,\vec{k}}, \tag{26}$$

sodass

$$H_{EMF} = \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{P^2_{\vec{k},\lambda}}{2} + \frac{\omega_k^2 Q^2_{\vec{k},\lambda}}{2}. \tag{27}$$

Wir haben den Hamiltonoperator des EM-Feldes als eine Summe von Hamiltonoperatoren harmonischer Oszillatoren dargestellt. Jeder von diesen Oszillatoren hat eigene Frequenz (ω_k) und kann quantisiert werden. D.h. wir erheben $Q_{k,\lambda}$ und $P_{k,\lambda}$ zu Operatoren mit folgenden Unschärferelationen

$$[Q_{k,\lambda}, Q_{k',\lambda'}] = 0, \quad [P_{k,\lambda}, P_{k',\lambda'}] = 0, \quad [P_{\vec{k},\lambda}, Q_{\vec{k}',\lambda'}] = -i\hbar\delta_{\vec{k}\,\vec{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}. \tag{28}$$

Wir können jetzt dem üblichen Weg folgen, um den Quantenoszillator zu beschreiben, indem wir die entsprechenden Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren einführen. Für einen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \tag{29}$$

haben wir Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$\hat{a} = \frac{i\hat{p} + m\omega\hat{x}}{\sqrt{2\hbar m\omega}}, \quad \hat{a}^\dagger = \frac{-i\hat{p} + m\omega\hat{x}}{\sqrt{2\hbar m\omega}}, \tag{30}$$

mit

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \tag{31}$$

Mit diesen Operatoren sieht H so aus

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \tag{32}$$

Wir machen genau das Gleiche für den Hamiltonoperator des EM-Feldes. Wir führen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für jeden Oszillator ein

$$\hat{a}_{\vec{k},\lambda} = \frac{i\hat{P}_{\vec{k},\lambda} + \omega_k \hat{Q}_{\vec{k},\lambda}}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}, \quad \hat{a}^\dagger_{\vec{k},\lambda} = \frac{-i\hat{P}_{\vec{k},\lambda} + \omega_k \hat{Q}_{\vec{k},\lambda}}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}, \tag{33}$$

sodass

$$[\hat{a}_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}^\dagger_{\vec{k}',\lambda'}] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'} \tag{34}$$

und

$$H_{EMF} = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega_k \left(a^\dagger_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right). \tag{35}$$

Wie können wir nun die Schrödingergleichung mit diesem Hamiltonoperator lösen? Die Schrödingergleichung hat die Form

$$H_{EFM}|\psi\rangle = E|\psi\rangle. \tag{36}$$

Wie für den normalen Oszillator, gibt es einen Vakuumzustand, den jeder Vernichtungsoperator vernichtet

$$a_{\vec{k},\lambda}|0\rangle = 0. \tag{37}$$

Einen Zustand mit Polarisation λ, Impuls $\vec{k}$ und Energie $\hbar\omega_{\vec{k}} = \hbar|k|c$ erhalten wir, indem wir auf das Vakuum mit $a^\dagger_{\vec{k}\lambda}$ wirken

$$|\vec{k}, \lambda\rangle = a^\dagger_{\vec{k},\lambda}|0\rangle. \tag{38}$$

Dieser Quantenzustand beschreibt ein Photon. Die Zustände sind normiert

$$\langle \vec{k}', \lambda' | \vec{k}, \lambda \rangle = \langle 0 | a_{\vec{k}',\lambda} a^\dagger_{\vec{k},\lambda} | 0 \rangle = \langle 0 | [a_{\vec{k}',\lambda}, a^\dagger_{\vec{k},\lambda}] | 0 \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\vec{k}\vec{k}'}. \tag{39}$$

Einen Zustand mit zwei verschieden Photonen schreiben wir als

$$|\vec{k}, \lambda; \vec{k}', \lambda' \rangle = a^\dagger_{\vec{k},\lambda} a^\dagger_{\vec{k}',\lambda'} |0\rangle, \tag{40}$$

und so weiter.

Um zu verstehen, wie Photonen mit geladenen Teilchen wechselwirken, können wir das Vektorpotential mit Hilfe von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren umschreiben. Wir benutzen

$$b_{k,\lambda} = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \frac{\left(Q_{\vec{k},\lambda} + i P_{\vec{k},\lambda}/\omega_{\vec{k},\lambda}\right)}{2} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k V}}\, \hat{a}_{\vec{k},\lambda}. \tag{41}$$

Dann

$$b^*_{k,\lambda} \to \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k V}}\, \hat{a}^\dagger_{\vec{k},\lambda}. \tag{42}$$

und

$$\vec{A}(t,\vec{r}) = \sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k V}} \left(\vec{\epsilon}_{\lambda,\vec{k}} a_{\vec{k},\lambda} e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \epsilon^*_{\vec{k},\lambda} a^\dagger_{\vec{k},\lambda} e^{i\omega_k t - i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right). \tag{43}$$

Die Wechselwirkung des Strahlungsfelds mit geladenen Teilchen beschreibt man mit Hilfe des Hamiltonsoperators

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + V(\vec{r}) = \frac{1}{2m}\left(\vec{p}^2 - 2\frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{p} + \frac{e^2}{c^2}\vec{A}^2\right) + V(\vec{r}) \\ &= \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) - \frac{e}{mc}\vec{A}\cdot\vec{p} + \frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2 = H_0 + H_{\text{int}}, \end{aligned} \tag{44}$$

wobei

$$H_{\text{int}} = -\frac{e}{mc}\vec{A}\cdot\vec{p} + \frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2 \tag{45}$$

die Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld beschreibt.

Wir werden H_{int} in Störungstheorie betrachten. D.h. wir brauchen die Matrixelemente von H_{int} zwischen Zuständen mit verschiedener Zahl von Photonen. Weil

$$\vec{A} \sim a + a^\dagger \tag{46}$$

ist, sind die folgenden Übergänge von Null verschieden

$$-\frac{e}{mc}\vec{A}\cdot\vec{p} \leftrightarrow \Delta N_\gamma = \pm 1, \quad \frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2 \leftrightarrow \Delta N_\gamma = \pm 2, 0. \tag{47}$$

Zum Schluss berechnen wir die Matrixelemente von H_{int} zwischen Zuständen deren Photonenzahl sich um ein Photon unterscheidet. Wir nehmen an, dass es im Anfangs- bzw. Endzustand, $n_{\vec{k},\lambda}$ bzw. $n_{\vec{k},\lambda}+1$, Photonen mit Impuls $\vec{k}$ und Polarisation λ gibt. Dann

$$M_{fi} = \langle n_{\lambda,\vec{k}} + 1, f|H_{\text{int}}|n_{\lambda,\vec{k}}, i\rangle, \tag{48}$$

wobei $|f\rangle$ und $|i\rangle$ End- und Anfangszustände des geladenen Teilches sind. Wir finden

$$M_{fi} = \langle n_{\lambda,\vec{k}}+1, f|H_{\text{int}}|n_{\lambda,\vec{k}}, i\rangle, = \langle n_{\lambda,\vec{k}}+1, f|\frac{-e}{mc}\vec{p}\vec{A}|n_{\lambda,\vec{k}}, i\rangle = \langle f|\frac{-e}{mc}\vec{p}\langle n_{\lambda,\vec{k}}+1|\vec{A}|n_{\lambda,\vec{k}}\rangle|i\rangle. \tag{49}$$

Um jetzt

$$\langle n_{\lambda,\vec{k}} + 1|\vec{A}|n_{\lambda,\vec{k}}\rangle \tag{50}$$

zu berechnen, brauchen wir

$$\langle n_{\lambda,\vec{k}} + 1|a^{\dagger}_{\vec{k}',\lambda'}|n_{\lambda,\vec{k}}\rangle = \sqrt{n_{\vec{k},\lambda} + 1}\delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}. \tag{51}$$

Damit erhalten wir

$$\langle n_{\lambda,\vec{k}} + 1|\vec{A}|n_{\lambda,\vec{k}}\rangle = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2(n_{\vec{k}\lambda} + 1)}{\omega_{\vec{k}}V}}\,\vec{\epsilon}^{\,*}_{\lambda,\vec{k}}e^{i\omega_{\vec{k}}t - i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \tag{52}$$

Wir benutzen diesen Ausdruck in Gl. (49) und bekommen

$$M_{fi} = \langle n_{\lambda,\vec{k}} + 1, f|H_{\text{int}}|n_{\lambda,\vec{k}}, i\rangle = e^{-i\omega_k t}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2(n_{\vec{k}\lambda} + 1)}{\omega_{\vec{k}}V}}\langle f|\frac{-e}{mc}\vec{p}\cdot\vec{\epsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}|i\rangle. \tag{53}$$

Schließlich verwenden wir Fermis goldene Regel. Dann liefert der zeitabhängig Vorfaktor $e^{-i\omega_k t}$ die δ-Funktion, die die Energieerhaltung beschreibt. D.h. das Matrixelement, das wir für $n \to n+1$ Übergange brauchen, ist

$$M_{i+n_{\vec{k},\lambda}\to f+n_{\vec{k},\lambda}+1} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2(n_{\vec{k}\lambda} + 1)}{\omega_{\vec{k}}V}}\langle f|\frac{-e}{mc}\vec{p}\cdot\vec{\epsilon}^{\,*}_{\vec{k},\lambda}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}|i\rangle. \tag{54}$$

Eine identische Rechngung ergibt das Ergebnis für $n \to n-1$ Übergänge

$$M_{i+n_{\vec{k},\lambda}\to f+n_{\vec{k},\lambda}-1} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2(n_{\vec{k}\lambda})}{\omega_{\vec{k}}V}}\langle f|\frac{-e}{mc}\vec{p}\cdot\vec{\epsilon}_{\vec{k},\lambda}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}|i\rangle. \tag{55}$$