Vorlesung 13

Hochenergie-Streuung

Die Bornsche Näherung kann man verwenden, falls eine der folgenden Ungleichungen zutrifft

$$|V(\vec{r})| \ll \frac{\hbar^2}{2ma^2} \quad \text{oder} \quad |V(\vec{r})| \ll \frac{\hbar v}{a}, \tag{1}$$

wobei $v = p/m = \hbar k/m$ und a die Reichweite des Potentials ist. Es kann aber auch sein, dass keine von diesen Ungleichungen stimmt, aber $E \gg |V(\vec{r})|$ ist. In dieser Situation ist die Bornsche Näherung nicht verwendbar und wir brauchen eine andere Methode, um die Streuung zu beschreiben.

Physikalisch ist es ganz klar, dass bei Streuung bei hohen Energien der Streuwinkel klein ist. Wir können versuchen, die Wellenfunktion als eine modifizierte ebene Welle darzustellen. Wir schreiben

$$\psi = e^{ikz} F(z, \vec{\rho}), \tag{2}$$

wobei

$$\vec{r} = z\vec{e}_z + \vec{\rho}, \quad \vec{e}_z \cdot \vec{\rho} = 0, \quad \vec{r}^2 = z^2 + \vec{\rho}^2. \tag{3}$$

Wir schreiben den Operator der kinetischen Energie als

$$-\frac{\hbar^2 \vec{\partial}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\vec{\partial}^2}{\partial \vec{\rho}^2}\right], \tag{4}$$

und erhalten die Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\vec{\partial}^2}{\partial \vec{\rho}^2}\right]\psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\psi = E\psi. \tag{5}$$

Wir setzen den Ansatz für die Wellenfunktion aus Gl. (2) in die Schrödingergleichung ein und finden

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[2ik\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right] + V(z, \vec{\rho})F - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 F}{\partial \vec{\rho}^2} = 0. \tag{6}$$

Im Limes $k \to \infty$ müssen wir den ersten und den dritten Term betrachten, wie wir weiter unten diskutieren werden; wir erhalten dann

$$-\frac{ik\hbar^2}{m}\frac{\partial F}{\partial z} + V(z, \vec{\rho})F = 0 \quad \Rightarrow \quad F(z, \vec{\rho}) = \exp\left[\frac{-i}{\hbar v}\int\limits_{-\infty}^{z} \mathrm{d}\bar{z}\, V(\bar{z}, \vec{\rho})\right]. \tag{7}$$

Die untere Integrationsgrenze ist so gewählt, dass bei $z \to -\infty$ die Wellenfunktion $\psi = e^{ikz}$ ist. Dies entspricht dem Setup des Streuexperiments, das wir beschreiben wollen. Die Wellenfunktion lautet

$$\psi(\vec{r}) = e^{ikz} e^{\frac{-i}{\hbar v}\int\limits_{-\infty}^{z} \mathrm{d}\bar{z}\, V(\bar{z}, \vec{\rho})}. \tag{8}$$

Wir können jetzt unsere Näherungen rechtfertigen. Wir berechnen

$$\frac{\partial F}{\partial z} \sim \frac{mV}{\hbar^2 k} F, \tag{9}$$

sodass

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \sim \left(\frac{mV}{\hbar^2 k}\right)^2 F \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \sim \frac{mV}{\hbar^2 ka} F. \tag{10}$$

Für den letzten Schritt haben wir angenommen, dass $\partial V/\partial z \sim V/a$ ist, wobei a die Reichweite des Potentials bezeichnet.

Jetzt vergleichen wir die einzelnen Terme in der Schrödingergleichung. Wir finden

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \sim \frac{mV}{\hbar^2 k^2} \frac{mV}{\hbar^2} F \sim \frac{mV}{\hbar^2 k^2}\, k \frac{\partial F}{\partial z} \sim \frac{V}{E}\, k \frac{\partial F}{\partial z} \ll k \frac{\partial F}{\partial z}, \tag{11}$$

oder

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \sim \frac{mV}{\hbar^2 ka} F \sim \frac{1}{ka}\, k \frac{\partial F}{\partial z} \ll k \frac{\partial F}{\partial z}, \tag{12}$$

weil $ka \gg 1$ ist. Das Gleiche gilt auch für die Ableitung nach $\vec{\rho}$, weil gemäß einer analogen Argumentation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} \sim \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \tag{13}$$

gilt.

Wir können jetzt die Streuamplitude berechnen. Wir kennen das exakte Ergebnis

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \mathrm{d}^3\vec{r} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}} V(\vec{r})\psi(\vec{r}). \tag{14}$$

Nun verwenden wir die Wellenfunktion aus Gl. (8) und erhalten

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \mathrm{d}^3\vec{r} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\, V(\vec{r})\, e^{-\frac{i}{\hbar v}\int\limits_{-\infty}^{z} \mathrm{d}\bar{z} V(\bar{z},\rho)}, \tag{15}$$

wobei $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$ ist.

Diese Formel können wir weiter vereinfachen, indem wir die Kleinheit der Streuwinkel ausnutzen. Damit können wir schreiben

$$\vec{q}\cdot\vec{r} = q_z z + \vec{q}_\perp \cdot \vec{\rho}. \tag{16}$$

Die q-Komponente entlang der z-Achse ist

$$q_z = \frac{\vec{q}\cdot\vec{k}}{k} = \frac{(\vec{k}' - \vec{k})\cdot\vec{k}}{k} = -2\sin^2\frac{\theta}{2} k \sim \mathcal{O}(\theta^2). \tag{17}$$

Die transversale Komponente ist größer als q_z

$$\vec{q}_\perp \sim k\sin\theta \sim \mathcal{O}(\theta) \gg q_z. \tag{18}$$

D.h.

$$\vec{q} \cdot \vec{r} \approx \vec{q}_\perp \cdot \vec{\rho}. \tag{19}$$

Mit dieser Näherung erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \mathrm{d}^3\vec{r} e^{-i\vec{q}_\perp \cdot \vec{\rho}}\, V(\vec{r})\, e^{-\frac{i}{\hbar v} \int\limits_{-\infty}^{z} \mathrm{d}\bar{z} V(\bar{z},\vec{\rho})} \\
&= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \mathrm{d}^2\vec{\rho} e^{-i\vec{q}_\perp \cdot \vec{\rho}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z V(z,\rho)\, e^{-\frac{i}{\hbar v} \int\limits_{-\infty}^{z} \mathrm{d}\bar{z} V(\bar{z},\vec{\rho})} \\
&= -\frac{ik}{2\pi} \int \mathrm{d}^2\vec{\rho} e^{-i\vec{q}_\perp \cdot \vec{\rho}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \frac{\partial}{\partial z}\, e^{-\frac{i}{\hbar v} \int\limits_{-\infty}^{z} \mathrm{d}\bar{z} V(\bar{z},\vec{\rho})} \\
&= -\frac{ik}{2\pi} \int \mathrm{d}^2\vec{\rho}\, e^{-i\vec{q}_\perp \cdot \vec{\rho}} \left[e^{-\frac{i}{\hbar v} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\bar{z} V(\bar{z},\vec{\rho})} - 1 \right].
\end{aligned} \tag{20}$$

Um den totalen Wirkungsquerschnitt zu berechnen, verwenden wir das optische Theorem

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \mathrm{Im}[f(0)] = \frac{4\pi}{k} \frac{-k}{2\pi} \int \mathrm{d}^2\vec{\rho}\,[\cos(2\delta(\rho)) - 1] = 4 \int \mathrm{d}^2\vec{\rho} \sin^2\delta(\vec{\rho}), \tag{21}$$

wobei

$$\delta(\vec{\rho}) = \frac{1}{2\hbar v} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\ V(z,\vec{\rho}). \tag{22}$$

Wir können diese Formel mit der Partialwellenentwicklung des Wirkungsquerschnitts vergleichen. Die Entwicklung lautet

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2\delta_l. \tag{23}$$

Die Stoßparameter ρ können wir klassisch mit dem Bahndrehimpuls in Verbindung bringen

$$\hbar l = m v \rho. \tag{24}$$

Außerdem sind für kleine Streuwinkel große Stoßparameter und, dementsprechend, große Bahndrehimpulse relevant

$$\theta \sim l^{-1}. \tag{25}$$

D.h., dass wir die l-Summe als Integral über ρ umschreiben können

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2\delta_l \approx \frac{4\pi}{k^2} \int\limits_0^{\infty} \mathrm{d}l\ 2l \sin^2\delta_l \\
&\approx \frac{4\pi}{k^2} \left(\frac{mv}{\hbar}\right)^2 \int\limits_0^{\infty} \mathrm{d}\rho\ 2\rho \sin^2\delta_l = 4 \int \mathrm{d}^2\vec{\rho}\ \sin^2\delta_l.
\end{aligned} \tag{26}$$

Wir vergleichen diese Formel mit Gl. (21,22) und erhalten dann die Streuphasen

$$\delta_l \approx \frac{1}{2\hbar v} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\, V(z, \vec{\rho}). \tag{27}$$

Wir können diese Formeln benutzen, um zu bestimmen für welche Potentiale der Wirkungsquerschnitt endlich ist. Zur Erinnerung: in der klassischen Mechanik sind alle Wirkungsquerschnitte unendlich (außer für Potentiale mit endlichen Reichweiten). Was passiert in Quantenmechanik?

Wir nehmen das Potential $V(\vec{r}) = \alpha/r^n$ an. Die Streuphase ergibt sich dafür zu

$$\delta(\vec{\rho}) = \frac{1}{2\hbar v} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z \frac{\alpha}{(z^2 + \vec{\rho}^2)^{n/2}} \overset{(z=\rho\xi)}{=} \frac{\alpha}{2\hbar v} \frac{1}{\rho^{n-1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\xi}{(1+\xi^2)^{n/2}} \sim \frac{\alpha}{2\hbar v} \frac{C_n}{\rho^{n-1}}. \tag{28}$$

Im Limes $\rho \to \infty$ gilt somit

$$\sigma = 4 \int \mathrm{d}^2\vec{\rho} \sin^2\left[\delta(\vec{\rho})\right] = 4 \int \mathrm{d}^2\vec{\rho} \sin^2\left[\frac{\alpha}{2\hbar v}\frac{C_n}{\rho^{n-1}}\right] = \int \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^{2n-3}} \tag{29}$$

Dieses Integral konvergiert für $\rho \to \infty$, falls $n > 2$ ist. D.h. in der Quantenmechanik ist der Wirkungsquerschnitt für die Streuung am Potential $V(r)$ endlich, falls für das Potential $\lim_{r\to\infty}\left[r^2 V(r)\right] \to 0$ gilt.

Zwei Bemerkungen:

- Der Wirkungsquerschnitt für die Streuung am Coulomb-Potential α/r ist auch in der Quantenmechanik unendlich.
- Kleinwinkelstreuung ist ein Quantenprozess. Das liegt daran, dass wenn die Streuwinkel kleiner als die Richtungsunschärfe der einlaufenden Welle ist, $\Delta\theta \sim 1/l \sim 1/\rho$, kann man eigentilich nicht mehr von Streuung reden.