

Vorlesung 11

Streuung bei niedrigen Energien

Wir haben gesehen, dass wir den Wirkungsquerschnitt als eine Summe über Partialwellen darstellen können

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l. \quad (1)$$

Allerdings hat diese Reihe unendlich viele Terme und die Streuphasen sind nicht bekannt. Das bedeutet, dass diese Darstellung nicht sehr praktisch ist. Es gibt aber ein wichtiger Fall – die Streuung bei niedrigen Energien – wo wir nur eine kleine Zahl von Termen in Gl. (1) brauchen.

Um das zu bestätigen, gehen wir zurück zur Schrödingergleichung und versuchen, eine exakte Darstellung für die Streuphasen zu erreichen. Wir schreiben die Wellenfunktionen als $\psi(\vec{r}) = Y_{lm}(\theta, \phi) u_l(r)/r$ und bekommen für den Radialteil die Schrödingergleichung

$$-\frac{d^2 u_l(r)}{dr^2} + \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2mV(r)}{\hbar^2} \right] u_l(r) = k^2 u_l(r), \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \quad (2)$$

Die Schrödingergleichung für ein freies Teilchen lautet

$$-\frac{d^2 f_l(r)}{dr^2} + \left[\frac{l(l+1)}{r^2} \right] f_l(r) = k^2 f_l(r), \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \quad (3)$$

Wir betrachten jetzt eine Funktion

$$W_l(r) = \frac{df_l(r)}{dr} u_l(r) - f_l(r) \frac{du_l(r)}{dr}, \quad (4)$$

leiten nach r ab, benutzen die Schrödingergleichungen für $f_l(r)$ und $u_l(r)$ und bekommen

$$\frac{dW_l(r)}{dr} = -\frac{2m}{\hbar^2} V(r) u_l(r) f_l(r). \quad (5)$$

Dann finden wir durch Integrieren

$$W_l(r) = W_l(0) - \frac{2m}{\hbar^2} \int_0^r dr u_l(r) f_l(r) V(r). \quad (6)$$

Was ist $W_l(0)$? Für Potentiale $V(r)$, die bei $r \rightarrow 0$ kleiner sind als das Zentrifugalpotential $\sim 1/r^2$, kann man $V(r)$ in diesem Limes vernachlässigen, sodass die reguläre Lösung der zwei Schrödingergleichungen Gl. (2) und (3) bei $r \rightarrow 0$ identisch sind. Das bedeutet, dass dann $W_l(0) = 0$ ist.

Als zweiten Punkt wollen wir $r \rightarrow \infty$ betrachten. Dann sind die Lösungen

$$u_l = \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right), \quad f_l = \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right). \quad (7)$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow \infty} W_l(r) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{df_l(r)}{dr} u_l(r) - f_l(r) \frac{du_l(r)}{dr} \\
&= k \cos\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right) - k \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \cos\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right) \\
&= k \sin \delta_l
\end{aligned} \tag{8}$$

D.h.

$$\sin \delta_l = -\frac{2m}{\hbar^2 k} \int_0^\infty dr u_l(r) f_l(r) V(r). \tag{9}$$

Wir wollen diese exakte Formel analysieren und zwar im Fall großer l -Werte. Das effektive Potential in der Schrödingergleichung hat die Form

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2mV(r)}{\hbar^2}. \tag{10}$$

Wir stellen uns vor, dass $V(r)$ eine endliche Reichweite R hat, sodass $V(r) \rightarrow 0$ für $r > R$. Wenn l größer wird, verschiebt sich das klassisch erlaubte Bewegungsgebiet nach rechts, bis es schließlich außerhalb des r -Intervalls liegt, in dem $V(r)$ wichtig ist. Dies bedeutet, dass, wenn l zunimmt, das Potential $V(r)$ unwichtiger wird. Also folgt, dass die Streuphasen δ_l für große l kleiner sind.

Wir können abschätzen für welche l -Werte diese Situation eintritt. Als ersten Schritt berechnen wir den Wendepunkt r_l der klassischen Bewegung des freien Teilchens (dies entspricht dem kleinsten Abstand des Teilchens zum Ursprung)

$$\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr_l^2} = E \Rightarrow l(l+1) = k^2 r_l^2. \tag{11}$$

Es gilt dann, für $r_l \gg R$,

$$\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mR^2} \gg E, \Rightarrow l(l+1) \gg (kR)^2 \Rightarrow l \gg kR. \tag{12}$$

Falls diese Bedingung erfüllt ist, ist δ_l klein und wir können die exakte Lösung der Schrödingergleichung $u_l(r)$ durch die freie Lösung $f_l(r)$ in Gl. (9) ersetzen. Wir erhalten

$$\delta_l = -\frac{2m}{\hbar^2 k} \int_0^\infty dr V(r) f_l(r)^2. \tag{13}$$

Wie groß dieses Integral ist, können wir abschätzen. Für das Integral brauchen wir wegen der endlichen Reichweite nur das Intervall $0 < r < R$ und wir betrachten die l -Werte, die $R \ll r_l$ erfüllen. Dann können wir die Gleichung für $f_l(r)$ so schreiben

$$-\frac{d^2 f_l(r)}{dr^2} + k^2 \left(\frac{r_l^2}{r^2} - 1 \right) f_l(r) = 0. \tag{14}$$

Da wir uns für Werte von r interessieren, wo $r_l/r \gg 1$ ist, können wir die obige Gleichung vereinfachen

$$-\frac{d^2 f_l(r)}{dr^2} + k^2 \frac{r_l^2}{r^2} f_l(r) = 0. \quad (15)$$

Diese Gleichung können wir jetzt ohne Probleme lösen. Als Ansatz nehmen wir $f_l(r) = r^\nu$ und bekommen

$$\nu(1 - \nu) + l(l + 1) = 0, \quad \Rightarrow \quad \nu = l + 1 \text{ oder } -l. \quad (16)$$

Wir suchen eine bei $r = 0$ reguläre Lösung, d.h. es bleibt nur¹

$$f_l(r) \approx (kr)^{l+1}. \quad (17)$$

Damit schätzen wir dann die Phase ab durch

$$\delta_l \sim -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^R dr (kr)^{2l+2} V(r) = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^1 d\xi R (kR\xi)^{2l+2} V(\xi R) \sim (kR)^{2l+1}, \quad (18)$$

wobei wir angenommen haben, dass $2m/\hbar^2 V(\xi R) \sim 1/R^2$ skaliert (basierend auf Dimensionsanalyse). D.h.

$$\delta_l \sim (kR)^{2l+1}, \quad (19)$$

und, weil $kR \ll 1$ ist, nimmt δ_l mit wachsendem l ab.

Es ist offensichtlich, dass sich alle diese Näherungen für kleine Energien verbessern (die Bedingung $l \gg kR$ ist für alle l -Werte im Limes $k \rightarrow 0$ erfüllt).

Im Extremfall $k \rightarrow 0$ ist nur der Term mit $l = 0$ (S -Welle) wichtig. Dann

$$\sigma|_{k \rightarrow 0} \approx \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0. \quad (20)$$

Wir definieren die “Streulänge” durch

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{e^{i\delta_0} \sin \delta_0}{k} = -a. \quad (21)$$

Der Wirkungsquerschnitt ist dann

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sigma = 4\pi a^2. \quad (22)$$

Wie groß oder klein kann die Streulänge sein? Um das zu bestimmen, schauen wir uns ein Beispiel an – die Streuung an einen Potentialtopf. Wir interessieren uns nur für niedrige Energien und betrachten S -Wellen. Das Potential ist

$$V(r) = -V \theta(R - r). \quad (23)$$

¹Den Vorfaktor k^L führen wir ein, weil (für unsere Normierung) $f_l(r)$ einheitenlos sein soll.

Die Schrödingergleichung lautet dann

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 f_0(r)}{dr^2} &= k^2 f_0(r), \quad r > R, \\ -\frac{d^2 f_0(r)}{dr^2} &= \left(k^2 + \frac{2mV}{\hbar^2}\right) f_0(r), \quad r < R. \end{aligned} \quad (24)$$

Die zwei Lösungen sind

$$f_0(r) = A \sin(kr + \delta_0) \theta(r - R) + B \sin(\kappa r) \theta(R - r), \quad (25)$$

wobei

$$\kappa = \sqrt{k^2 + \frac{2mV}{\hbar^2}}. \quad (26)$$

Die Stetigkeit von $f_0(r)$ und $df_0(r)/dr$ bei $r = R$ ergibt

$$\frac{\tan(kR + \delta_0)}{\tan(\kappa R)} = \frac{k}{\kappa}. \quad (27)$$

Die Gleichung (27) ist gültig für alle k -Werte. Wir lösen die Gleichung nach δ_0 und bekommen

$$\delta_0 = -kR + \text{atan}\left(\frac{k}{\kappa} \tan(\kappa R)\right). \quad (28)$$

Im $k \rightarrow 0$ Limit bekommen wir $\kappa = \kappa_0$. Falls $\tan(\kappa_0 R)$ nicht “zu groß” ist, bekommen wir

$$\delta_0 = k \left(-R + \frac{\tan(\kappa_0 R)}{\kappa_0} \right) \quad (29)$$

Falls der Potentialtopf flach ist, also $\kappa_0 R \ll 1$ gilt, erhalten wir²

$$\delta_0 = k \left(\frac{1}{3} \kappa_0^2 R^3 \right), \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{\kappa_0^2 R^3}{3}. \quad (30)$$

D.h. der Wirkungsquerschnitt lautet

$$\sigma = 4\pi a^2 = 4\pi \frac{\kappa_0^4 R^6}{9} = 4\pi \frac{4m^2 V^2}{9\hbar^4} R^6. \quad (31)$$

Weil $\kappa_0 R \ll 1$ ist, ist der Wirkungsquerschnitt $\sigma \sim (\kappa_0 R)^4 R^2$, d.h. $(\kappa_0 R)^4$ -mal kleiner als der “natürliche” Wert $\sigma \sim R^2$.

Es gibt aber auch einen anderen Fall und zwar wenn $\tan(\kappa_0 R) = \infty$ ist. In diesem Fall können wir obige Näherungen nicht rechtfertigen und wir müssen unsere Vorgehensweise ändern. Wir schauen uns Gl. (28) an und stellen fest, dass im Limes $k \rightarrow 0$, wenn $\tan \kappa_0 R \gg 1$ ist, wir den Term $(-kR)$ vernachlässigen können. Dann gilt

$$\tan \delta_0 = \frac{k}{\kappa} (\tan \kappa R) \quad (32)$$

²Wir benutzen $\tan(x) \approx x + x^3/3 + \mathcal{O}(x^5)$.

und wir schreiben

$$\sin^2 \delta_0 = \frac{\tan^2 \delta_0}{1 + \tan^2 \delta_0} = \frac{k^2}{\gamma^2 + k^2}, \quad \gamma = \frac{\kappa}{\tan(\kappa R)}. \quad (33)$$

Der Wirkungsquerschnitt ist dann

$$\sigma = \frac{4\pi}{\gamma^2 + k^2}. \quad (34)$$

Weil $\gamma \sim 1/\tan(\kappa_0 R) \ll 1$ ist, ist der Wirkungsquerschnitt bei kleinen Energien sehr groß. In diesem Fall spricht man von “Resonanzstreuung.”

Was bedeutet das physikalisch? Um das zu verstehen, gehen wir zurück zur Schrödingergleichung und schreiben die Gleichung für einen gebundenen S -Zustand mit der Energie $E = -\hbar^2 k^2/(2m)$. Wir finden die zwei Lösungen

$$u(r > R) = A_1 e^{-kr}, \quad u(r < R) = A_2 \sin(\tilde{\kappa} r), \quad (35)$$

wobei $\tilde{\kappa} = \sqrt{2mV/\hbar^2 - k^2}$ ist. Die Forderung der Stetigkeit bei $r = R$ ergibt

$$\frac{\tan(\tilde{\kappa} R)}{\tilde{\kappa}} = -\frac{1}{k}. \quad (36)$$

Wir sehen jetzt, dass $k = 0$ gerade $\tan(\kappa_0 R) = \infty$ entspricht; $k = 0$ bedeutet aber, dass es einen gebundenen Zustand mit Energie Null gibt. Ein großer Wirkungsquerschnitt bei kleinen Energien (oder eine große Streulänge) ist ein Signal dafür, dass so ein Zustand existiert.