Vorlesung 10

Partialwellen

Wir wollen eine Darstellung für den Wirkungsquerschnitt herleiten bei der wir Quantenzustände mit bestimmtem Bahn-Drehimpuls betrachten. Wir fangen mit der Schrödingergleichung an

$$\left[\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}). \tag{1}$$

Das Potential $V(\vec{r}) = V(r)$ ist ein Zentralpotential. Für die Wellenfunktion setzen wir $\psi_{nlm}(\vec{r}) = Y_{lm}(\theta)u_{nl}(r)/r$ an und erhalten

$$-\frac{\mathrm{d}^2 u_{nl}}{\mathrm{d}r^2} + \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2mV(r)}{\hbar^2}\right]u_{nl} = \frac{2mE}{\hbar^2}u_{nl}. \tag{2}$$

Jetzt betrachten wir große Werte des Ortsvektors und finden

$$-\frac{\mathrm{d}^2 u_{nl}}{\mathrm{d}r^2} = k^2 u_{nl}, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \tag{3}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$u_{nl}(r) = A_{nl}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right). \tag{4}$$

Die Phase der Lösung ist hier so gewählt, dass wenn $V(r) = 0$ ist, auch $\delta_l = 0$ gilt. Es ist zu betonen, dass falls wir δ_l wissen wollen, wir die Schrödingergleichung lösen müssen.

Die asymptotische Form der Wellenfunktion, die wir benutzen um elastische Streuung zu beschreiben, lautet

$$\psi(\vec{r})|_{\vec{r}\to\infty} = e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r}\,e^{ikr}. \tag{5}$$

Wir können $\psi(\vec{r})$ durch Zustände mit bestimmtem Drehimpuls ψ_{nlm} schreiben

$$\psi(\vec{r})|_{\vec{r}\to\infty} = e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r}\,e^{ikr} = \sum_l^\infty C_l P_l(\cos\theta)\frac{\sin(kr - \pi l/2 + \delta_l)}{kr}. \tag{6}$$

Aus unserer Diskussion des optischen Theorems wissen wir, dass

$$e^{ikz} = \frac{1}{2ikr}\sum_{l=0}^\infty\Big((2l+1)P_l(\cos\theta)e^{ikr} - (2l+1)P_l(\cos\theta)(-1)^l e^{-ikr}\Big) \tag{7}$$

Wir vergleichen Gl. (6) und Gl. (7) und bekommen

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^\infty (2l+1)P_l(\cos\theta) + 2ikf(\theta) = \sum_{l=0}^\infty C_l P_l(\cos\theta)(-i)^l e^{i\delta_l},\\
&\sum_{l=0}^\infty (2l+1)P_l(\cos\theta)(-1)^l = \sum_{l=0}^\infty C_l P_l(\cos\theta)(i)^l e^{-i\delta_l},
\end{aligned} \tag{8}$$

Alle $P_l(\cos\theta)$ sind unabhängig. Deswegen erhalten wir aus der zweiten Gleichung in (8)

$$C_l = (2l+1) i^l e^{i\delta_l}. \tag{9}$$

Wir lösen die erste Gleichung in (8) nach $f(\theta)$ und finden damit die Streuamplitude

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)(2l+1)\left[e^{2i\delta_l} - 1\right]. \tag{10}$$

Der totale Wirkungsquerschnitt ist dann

$$\sigma = \int \mathrm{d}\Omega |f(\theta)|^2 = \int \frac{\mathrm{d}\Omega}{4k^2} \sum_{l=0,l'=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)(2l+1)\left[e^{2i\delta_l} - 1\right] P_l'(\cos\theta)(2l'+1)\left[e^{-2i\delta_{l'}} - 1\right]. \tag{11}$$

Wir nutzen die Orthogonalität der Legendre-Polynome,

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) = \frac{2\delta_{ll'}}{2l+1}, \tag{12}$$

aus und erhalten den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\sin^2\delta_l. \tag{13}$$

Wir können jetzt auf einem anderen Wege das optisches Theorem beweisen. Dazu berechnen wir $\mathrm{Im} f(\theta = 0)$ mithilfe von Gl. (10). Wir erhalten

$$\mathrm{Im}[f(0)] = \frac{1}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1-\cos 2\delta_l) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\sin^2\delta_l. \tag{14}$$

Durch Vergleich von Gl. (13) und Gl. (14) ergibt sich

$$\mathrm{Im}[f(0)] = \frac{k}{4\pi}\,\sigma. \tag{15}$$

Das ist wiederum das optische Theorem.

Wir machen noch eine Bemerkung dazu. Den Wirkungsquerschnitt können wir schreiben als die Summe der Wirkungsquerschnitte für Zustände mit bestimmtem Wert des Drehimpuls

$$\sigma = \sum_l \sigma_l, \quad \sigma_l = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l. \tag{16}$$

Weil $\sin^2\delta_l < 1$ gilt, sind alle σ_l beschränkt

$$\sigma_l < \frac{4\pi}{k^2}. \tag{17}$$