Vorlesung 8

Atom im konstanten magnetischen Feld

Wir betrachten N geladene Teilchen im konstanten magnetischen Feld. Der Hamiltonoperator ist

$$\begin{aligned} H &= \sum_a \frac{\left(\vec{p}_a - \frac{e_a}{c}\vec{A}_a\right)^2}{2m_a} + V(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N) - \sum_a g_a \vec{s}_a \cdot \vec{B} \\ &= H_0 + \sum_a \left(-\frac{e_a}{2m_a c}\left(\vec{p}_a \cdot \vec{A}_a + \vec{A}_a \cdot \vec{p}_a\right) + \frac{e_a^2 \vec{A}_a^2}{2m_a c^2} \right) - \sum_a g_a \vec{s}_a \cdot \vec{B}, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei H_0 der Hamiltonoperator des Systems ohne magnetisches Feld ist.

Um ein konstantes Magnetfeld zu beschreiben, können wir das Vektorpotential in der Form $\vec{A} = -1/2\ [\vec{r} \times \vec{B}]$ schreiben. Für dieses $\vec{A}$ ist der Kommutator mit dem Dreier-Impuls Null

$$\sum_{i=1}^{3} [p_i, A_i] = 0, \tag{2}$$

sodass $\vec{p} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \vec{p}$. Deswegen gilt

$$\frac{e_a}{2m_a c}\left(\vec{p}_a \cdot \vec{A}_a + \vec{A}_a \cdot \vec{p}_a\right) = \frac{e_a}{m_a c}\vec{A}_a \cdot \vec{p}_a = -\frac{e_a}{2m_a c}[\vec{r}_a \times \vec{B}] \cdot \vec{p}_a = \frac{e_a}{2m_a c}\vec{B} \cdot \vec{L}_a. \tag{3}$$

Der Hamiltonoperator ist dann

$$H = H_0 - \sum_a \left(\frac{e_a}{2m_a c}\vec{B} \cdot \vec{L}_a + g_a \vec{s}_a \cdot \vec{B} \right) + \sum_a \frac{e_a^2 \vec{A}_a^2}{2m_a c^2}. \tag{4}$$

Wir vergleichen die Größe der zwei Terme $\vec{A}_a^2$ und $\vec{B} \cdot \vec{L}$. In Atomen gilt

$$\Delta E_A \sim \frac{e\hbar}{2mc}\vec{B}, \quad \Delta E_{A^2} \sim \frac{e^2 a_B^2 B^2}{2mc^2}, \tag{5}$$

wobei a_B der Bohrsche Radius ist und wir $A \sim [\vec{r} \times \vec{B}] \sim a_B B$ benutzt haben. Wir finden

$$\frac{\Delta E_{A^2}}{\Delta E_A} \sim \frac{B}{\frac{\hbar c}{e a_B^2}} \sim \frac{B}{\frac{m^2 c e^3}{\hbar^3}} \sim \frac{B}{10^5 \text{ Tesla}}. \tag{6}$$

Das grösste magnetische Feld, das man im Labor produziert hat, ist $B \sim 10^3$ Tesla; d.h., dass δE_{A^2} immer viel kleiner als δE_A ist.

Wir vernachlässigen den $\vec{A}^2$-Term und betrachten zuerst spinloses Teilchen mit identischem Verhältnis von Ladung zu Masse. Dann gilt

$$\Delta H = -\frac{e}{2mc}\vec{B} \cdot \vec{L}, \tag{7}$$

wobei $\vec{L} = \sum L_a$ der Bahndrehimpuls des Atoms ist.

Wir nehmen $\vec{B}$ entlang der z-Achse an, und finden dass

$$[\Delta H, L^2] = [\Delta H, L_z] = 0. \tag{8}$$

Falls die Energieniveaus von H_0 und L_z unabhängig sind (und deswegen $(2l+1)$-fach entartet), bedeutet das, dass alle Niveaus sich aufspalten

$$\Delta E(l_z) = -\frac{e\hbar}{2mc} B\, l_z, \quad -l \leq l_z \leq l. \tag{9}$$

Dieses Splitting ist als "normaler" Zeeman-Effekt bekannt.

Falls wir den Spin betrachten, ändert sich das Bild. Wir schreiben

$$\frac{e_a}{2m_a c} \to g_L, \qquad g_{a,s} \to g_s \tag{10}$$

und bekommen

$$\Delta H = -\left(g_L \vec{L} + g_S \vec{S}\right) \cdot \vec{B}, \tag{11}$$

wobei $\vec{S}$ der Spinoperator des Atoms ist. Jetzt betrachten wir die Situation, in der H_0 mit dem Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, aber nicht mit $\vec{L}$ und $\vec{S}$, kommutiert. D.h., dass Spin-Bahn-Wechselwirkung eine wichtige Rolle spielen wird, sodass wir alle Energieniveaus mit j, j_z, l und s klassifizieren können.

Wir wollen jetzt die Energieverschiebung berechnen, welche ΔH verursacht. Wir benutzen das Vektormodell und erhalten

$$\begin{aligned} \langle j, j_z, l, s | \vec{L} | j, j_z, l, s \rangle &= \langle j, j_z, l, s | \vec{J} | j, j_z, l, s \rangle \, \frac{j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)}{2j(j+1)}, \\ \langle j, j_z, l, s | \vec{S} | j, j_z, l, s \rangle &= \langle j, j_z, l, s | \vec{J} | j, j_z, l, s \rangle \, \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Die Verschiebung der Energieniveaus ist dann

$$\Delta E = -\left[(g_L + g_S) + \frac{(g_L - g_S)(l(l+1) - s(s+1))}{j(j+1)}\right] B J_z. \tag{13}$$

Diesen Effekt nennt man "anomalen" Zeeman-Effekt. Für ein Elektron im Wasserstoffatom ist $g_S = 2g_L$; das bedeutet, dass ein anomaler Zeeman-Effekt vorliegt.

Falls wir aber einen $\vec{L} = 0$, $\vec{S} = 0$ Zustand des Atoms betrachten, verschwindet die lineare Kopplung des magnetischen Feldes; was bleibt ist dann nur der $\mathcal{O}(\vec{A}^2)$ Term. Wir berechnen die Energieverschiebung

$$\begin{aligned} &\langle L = 0 | \, \frac{e^2}{2mc^2} \sum_a \vec{A}_a^2 \, | L = 0 \rangle = \frac{e^2}{8mc^2} \, \langle L = 0 | \sum_a \left(\vec{B}^2 \vec{r}_a^2 - (\vec{B} \cdot \vec{r}_a)^2\right) | L = 0 \rangle \\ &= \frac{e^2}{8mc^2} \, \langle L = 0 | \sum_a \left(\vec{B}^2 - \frac{1}{3} \vec{B}^2\right) \vec{r}_a^2 | L = 0 \rangle = \frac{e^2}{12mc^2} \, Z \bar{R}^2 \, B^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Hier ist Z die Zahl der Elektronen und $\bar{R}$ ist der gemittelte Ortsvektor des Elektrons

$$\bar{R}^2 = \frac{1}{Z} \sum_{a=1}^{Z} \langle \vec{r}_a^{\,2} \rangle \tag{15}$$

Wir können in diesem Fall das induzierte magnetische Moment berechnen und finden

$$\mu = -\frac{\partial \Delta E}{\partial B} = -\frac{e^2 Z^2 \bar{R}^2}{6mc^2} B. \tag{16}$$