Vorlesung 2

Drehimpulsaddition

Wir betrachten ein mechanisches System, das aus zwei unabhängigen Systemen besteht. Jedes der zwei Subsysteme besitzt einen Drehimpuls. Der Drehimpuls des ganzen Systems ist dann

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2. \tag{1}$$

Falls es zwischen den zwei Subsystemen keine Wechselwirkung gibt, sind $\vec{J}_{1,2}$ erhalten; wir können dann die Zustände des Gesamtsystems durch die Zustände der zwei Subsysteme beschreiben

$$|\Psi\rangle = |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle, \tag{2}$$

wobei

$$\begin{aligned} J_{1,2}^2 |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle &= j_{1,2}(j_{1,2}+1)|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle, \\ J_{1,2,z}|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle &= m_{1,2}|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle. \end{aligned} \tag{3}$$

Der Quantenzustand $|\Psi\rangle$ ist dann der Eigenzustand der Operatoren $J_{1,2}^2$, $J_{1,2,z}$.

Es kann auch sein, dass die zwei Subsysteme miteinander wechselwirken und zwar so, dass nur $J_{1,2}^2$ und $J = J_1 + J_2$ erhalten sind. Ein wichtiges Beispiel hierfür ist die folgende Wechselwirkung

$$H_{\text{int}} \sim \vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2 = \frac{1}{2}\left(\vec{J}^2 - \vec{J}_1^2 - \vec{J}_2^2\right). \tag{4}$$

Es ist einfach zu zeigen, dass

$$[\vec{J}_1, H_{\text{int}}] \sim \vec{J}_1 \times \vec{J}_2, \quad [J_{1,2}^2, H_{\text{int}}] = 0, \quad [J^2, H_{\text{int}}] = 0, \tag{5}$$

was obige Aussagen beweist. Dementsprechend wollen wir das System mit den folgenden Zuständen beschreiben

$$|j, m; j_1, j_2\rangle, \tag{6}$$

wobei j, m, j_1 und j_2 jeweils die Eigenwerte von $\vec{J}^2$, J_z, $\vec{J}_1^2$ und $\vec{J}_2^2$ sind.

Wir wollen jetzt alle möglichen Zustände $|j, m; j_1, j_2\rangle$ klassifizieren und konstruieren. Da $|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$ ein vollständiger Satz von Basisvektoren ist, können wir immer

$$|j, m; j_1, j_2\rangle = \sum_{m_1, m_2} C^{j,m}_{j_1, m_1; j_2, m_2} |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \tag{7}$$

schreiben. Wegen $J_z = J_{1,z} + J_{2,z}$ folgern wir, dass in der Summe nur solche Terme beitragen, welche die Bedingung

$$m_1 + m_2 = m \tag{8}$$

$m_1 \rightarrow$	$-j_1$	$-j_1+1$	...	...	...	j_1-2	j_1-1	j_1	$m_2 \downarrow$
	...	...	...	...	...	z	y	x	j_2
	...	...	...	...	...	...	z	y	j_2-1
	...	...	...	...	...	...	..	z	j_2-2
	...	...	...	...	...	...	..	...	...
	...	...	...	...	...	...	..	...	...
	...	...	...	...	...	...	..	...	$-j_2$

Tabelle 1: Addition von Drehimpulsen

erfüllen. Wir müssen dann die erlaubten j-Werte in der Gl. (7) bestimmen; natürlich muss $j \geq |m|$ sein.

Um das zu erreichen, ist es hilfreich, Tabelle 1 zu betrachten. Die Zeilen entsprechen möglichen Werten von $J_{1,z}$ und die Spalten möglichen Werten von $J_{2,z}$. Wenn $m = m_1 + m_2$ fixiert ist, können m_1 und m_2 sich entlang einer Diagonale ändern (in Tabelle 1 z.B. mit x, y, z bezeichnet). Wir nehmen an, dass $j_1 > j_2$.

Der größte Wert von m findet sich in der rechten oberen Ecke: $m_{\max} = j_1 + j_2$ und, wie aus der Tabelle hervorgeht, gibt es nur einen Zustand (x) mit diesem m-Wert. D.h., dass der maximale Wert für j auch $j_1 + j_2$ ist. Wir erhalten

$$|j_1 + j_2, j_1 + j_2; j_1, j_2\rangle = |j_1, j_1; j_2, j_2\rangle. \tag{9}$$

Als nächstes betrachten wir die Zustände mit $m = m_{\max} - 1 = j_1 + j_2 - 1$. Es folgt aus der Tabelle, dass es zwei Zustände mit diesem m-Wert gibt. Einer von diesen ist $|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1; j_1, j_2\rangle$, der Zweite ist $|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1; j_1, j_2\rangle$. Wir können den Zustand mit $j = j_1 + j_2$ relativ einfach bestimmen. Dazu wenden wir den Operator

$$J_- = J_{1,-} + J_{2,-} \tag{10}$$

auf die Zustände in Gl. (9) an, und bekommen

$$\begin{aligned} &\mu_-(j_1+j_2, j_1+j_2)|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1; j_1, j_2\rangle \\ &= \mu_-(j_1, j_1)|j_1, j_1 - 1; j_2, j_2\rangle + \mu_-(j_2, j_2)|j_1, j_1; j_2, j_2 - 1\rangle. \end{aligned} \tag{11}$$

Weil[1] $\mu_-(j, j) = \sqrt{2j}$, erreichen wir

$$|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1; j_1, j_2\rangle = \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}}\, |j_1, j_1 - 1; j_2, j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}}\, |j_1, j_1; j_2, j_2 - 1\rangle. \tag{12}$$

Den zweiten Zustand können wir ganz einfach mit Hilfe der Orthogonalitätsbedingung finden. Es muss

$$\langle j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1; j_1, j_2 | j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1; j_1, j_2\rangle = 0 \tag{13}$$

[1] Siehe Vorlesung 1.

gelten und dass der Zustand $|j_1+j_2-1, j_1+j_2-1; j_1, j_2\rangle$ durch eine lineare Kombination von $|j_1, j_1-1; j_2, j_2\rangle, |j_1, j_1; j_2, j_2-1\rangle$ gegeben ist. Es folgt

$$|j_1+j_2-1, j_1+j_2-1; j_1, j_2\rangle = \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}\,|j_1, j_1-1; j_2, j_2\rangle - \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}\,|j_1, j_1; j_2, j_2-1\rangle. \tag{14}$$

Falls wir den nächsten Schritt (z, siehe Tabelle 1) machen würden, bekämen wir es mit drei Zuständen zu tun; dementsprechend sollten wir uns mit drei Gesamtdrehimpulsen j beschäftigen, nämlich $j = j_1 + j_2$, $j = j_1 + j_2 - 1$ und $j = j_1 + j_2 - 2$. Zwei Zustände $j = j_1 + j_2, m = j_1 + j_2 - 2$ und $j = j_1 + j_2 - 1, m = j_1 + j_2 - 2$ können wir berechnen, indem wir den Operator J_- auf die Zustände mit $j = j_1 + j_2, m = j_1 + j_2 - 1$ und $j = j_1+j_2-1, m = j_1+j_2-1$ anwenden. Den Zustand mit $j = j_1+j_2-2, m = j_1+j_2-2$ können wir dann durch die Orthogonalitätsbedingungen bestimmen.

Die Methode, die wir hier beschrieben haben ist konstruktiv – wir können diese Methode weiterverfolgen und alle Quantenzustände von J und J_z konstruieren. Es ist klar, dass die Zahl der Zustände bis zum m-Wert $j_1 - j_2$ zunimmt;[2] danach ändert sie sich nicht. Das bedeutet, dass die möglichen Werte des Gesamtdrehimpulses j durch

$$j_1 - j_2 < j < j_1 + j_2 \tag{15}$$

gegeben sind.

Es ist interessant, die Zahl der Zustände zu berechnen. Einerseits haben wir $2j_1 + 1$ Zustände $|j_1, m_1\rangle$ und $2j_2 + 1$ Zustände $|j_2, m_2\rangle$, sodass wir auf

$$N_{j_1,j_2} = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \tag{16}$$

Quantenzustände insgesamt kommen.

Andererseits gibt es

$$N_j = \sum_{\tilde{j}=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2\tilde{j} + 1) \tag{17}$$

Um diese Summe zu berechnen, benutzen wir folgende Formeln

$$\sum_{j=0}^{N} 1 = N + 1, \quad \sum_{j=0}^{N} j = \frac{N(N+1)}{2}. \tag{18}$$

Wir bekommen

$$N_j = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) = N_{j_1,j_2}, \tag{19}$$

wie es natürlich sein muss.

Als konkretes Beispiel betrachten wir zwei Teilchen mit dem Spin $1/2$ und berechnen die Zustände mit definiten Werten des Gesamtspins $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$. Es folgt aus obiger

[2] Unter der Annahme $j_1 > j_2$.

Diskussion, dass es zwei Werte von s gibt und zwar $s = 0, 1$. Der Zustand mit $s = 1, s_z = \pm 1$ ist sehr einfach zu konstruieren; wir finden

$$|1, \pm 1; 1/2, 1/2\rangle = |1/2, \pm 1/2; 1/2, \pm 1/2\rangle. \tag{20}$$

Für $s_z = 0$, gibt zwei Zustände mit $s = 1$ und $s = 0$. Der $s = 1, s_z = 0$ Zustand folgt aus Gl. (12) und der $s = 0, s_z = 0$ Zustand aus Gl. (14). Explizit ergibt sich

$$\begin{aligned} |1, 0; 1/2, 1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1/2, -1/2; 1/2, 1/2\rangle + |1/2, 1/2; 1/2, -1/2\rangle\right), \\ |0, 0; 1/2, 1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1/2, -1/2; 1/2, 1/2\rangle - |1/2, 1/2; 1/2, -1/2\rangle\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Wir haben vier Zustände konstruiert und durch "entkoppelte" Zustände ausgedrückt. Wir können auch umgekehrt vorgehen, z.B.

$$\begin{aligned} |1/2, -1/2; 1/2, 1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1, 0; 1/2, 1/2\rangle + |0, 0; 1/2, 1/2\rangle\right), \\ |1/2, 1/2; 1/2, -1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1, 0; 1/2, 1/2\rangle - |0, 0; 1/2, 1/2\rangle\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Ganz allgemein können wir die Vektoren in einer vollständigen Basis durch Vektoren in einer anderen vollständigen Basis ausdrücken. Im gegebenen Fall können wir schreiben

$$|j, m; j_1, j_2\rangle = \sum_{m_1, m_2} C^{jm}_{j_1, m_1; j_2, m_2} \, |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle. \tag{23}$$

Die Konstanten $C^{jm}_{j_1, m_1; j_2, m_2}$ nennt man die Clebsch-Gordan-Koeffizienten. Diese Konstanten wählt man so, dass sie reell sind. Es ist klar, dass die Clebsch-Gordan-Koeffizienten folgende Bedingung erfüllen müssen

$$C^{jm}_{j_1, m_1, j_2, m_2} \sim \delta_{m, m_1 + m_2}. \tag{24}$$

Weil die Zustände $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$ orthonormal sind, bekommen wir eine andere "Definition" von Clebsch-Gordan-Koeffizienten

$$C^{jm}_{j_1, m_1; j_2, m_2} = \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m; j_1, j_2\rangle. \tag{25}$$

Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten sind reell; d.h.

$$C^{jm}_{j_1, m_1; j_2, m_2} = \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j, m; j_1, j_2\rangle = \langle j, m; j_1, j_2 | j_1, m_1; j_2, m_2\rangle. \tag{26}$$

Wir können jetzt Gl. (26) verwenden, um zu schreiben

$$|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = \sum_m \langle j, m; j_1, j_2 | j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \, |j, m; j_1, j_2\rangle = \sum_m C^{j,m}_{j_1, m_1; j_2, m_2} |j, m; j_1, j_2\rangle. \tag{27}$$

Die Orthogonalität der $|j,m;j_1,j_2\rangle$-Zustände ergibt bestimmte "Summenregeln" für Clebsch-Gordan-Koeffizienten. In der Tat gilt

$$\begin{aligned}
&\langle j',m';j_1,j_2|j,m;j_1,j_2\rangle = \delta_{j'j}\delta_{m'm} \\
&= \sum_{m_1',m_2'}\sum_{m_1,m_2} C^{j'm'}_{j_1m_1';j_2m_2'} C^{jm}_{j_1m_1;j_2m_2} \langle j_1,m_1';j_2,m_2'|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle \\
&= \sum_{m_1',m_2'}\sum_{m_1,m_2} C^{j'm'}_{j_1m_1';j_2m_2'} C^{jm}_{j_1m_1j_2m_2}\delta_{m_1m_1'}\delta_{m_2m_2'} = \sum_{m_1,m_2} C^{j'm'}_{j_1m_1;j_2m_2} C^{jm}_{j_1m_1;j_2m_2}.
\end{aligned} \tag{28}$$

D.h. also

$$\sum_{m_1,m_2} C^{j'm'}_{j_1m_1;j_2m_2} C^{jm}_{j_1m_1;j_2m_2} = \delta_{j'j}\delta_{m'm}. \tag{29}$$

Wir können auch die Orthogonalität der Zustände $|j_1,m_1;j_2,m_2\rangle$ benutzen, um

$$\delta_{m_1,m_1'}\delta_{m_2m_2'} = \sum_{j,m} C^{jm}_{j_1,m_1;j_2,m_2} C^{jm}_{j_1,m_1';j_2,m_2'} \tag{30}$$

zu erhalten.

Zusätzlich zu den Clebsch-Gordan-Koeffizienten benutzt man auch die sogenannten Wigner- oder $3j$-Symbole

$$C^{jm}_{j_1,m_1,j_2,m_2} = (-1)^{-j_1+j_2+m}\sqrt{2j+1}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Mit der Einführung der Wigner-Symbole versucht man explizit zu machen, dass die Indizes j, j_1, j_2 und m_1, m_2 und m ähnliche Rollen spielen. Z.B. ist der j-Wert begrenzt auf

$$|j_1 - j_2| < j < |j_1 + j_2|. \tag{32}$$

Angenommen dass $j_1 > j_2$. Dann folgt aus obiger Gleichung, dass

$$j - j_2 < j_1 < j + j_2, \tag{33}$$

also genau die gleiche Bedingung. Die symmetrische Natur der Wigner-Symbole ist manifest in dieser Formel

$$|0,0\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}\sum_{m_3=-j_3}^{j_3}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}|j_1m_1\rangle|j_2m_2\rangle|j_3m_3\rangle, \tag{34}$$

welche die Entwicklung des $|j=0, m_z=0\rangle$-Zustands in $|j_{1-3}m_{1-3}\rangle$-Zuständen beschreibt.

Die Wigner-Symbole besitzen folgende Eigenschaften:

1. Permutation von zwei Spalten ergibt einen Vorfaktor

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} &= (-1)^{j_1+j_2+j_3}\begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{j_1+j_2+j_3}\begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{35}$$

2. Falls wir die Vorzeichen aller Projektionen ändern, bekommen wir den gleichen Vorfaktor wie in Gl. (35)

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

3. Orthogonalität:

$$\begin{aligned} \sum_{m_1,m_2} (2j+1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j' \\ m_1 & m_2 & m' \end{pmatrix} &= \delta_{jj'}\delta_{mm'}, \\ \sum_{j,m}(2j+1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m'_1 & m'_2 & m \end{pmatrix} &= \delta_{m'_1 m_1}\delta_{m'_2 m_2}. \end{aligned} \tag{37}$$