Moderne Theoretische Physik I (Quantenmechanik I) SoSe 19

PROF. U. NIERSTE
DR. I. NIŠANDŽIĆ

Übungsblatt 10
Abgabe 05.07.2019
Besprechung 10.07.2019

Name: Matrikel-Nr: Gruppe:

(Bitte ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 17: Elektron im elektromagnetischen Feld (9 Punkte)

Betrachten Sie ein Elektron, das einem elektrischen Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{\nabla}\Phi(\boldsymbol{x})$ und einem magnetischen Feld $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ ausgesetzt ist. Beide Felder seien zeitlich konstant. Der Hamilton-Operator ist

$$H = \frac{1}{2m}\boldsymbol{\Pi}^2 - e\Phi \quad , \tag{1}$$

wobei der kinetische Impuls $\boldsymbol{\Pi}$ durch

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{P} + e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X})$$

gegeben ist. $\boldsymbol{P}$ ist der kanonische Impuls.

a) Leiten Sie aus den Vertauschungsrelationen $[P_j, P_k] = [X_j, X_k] = 0$ und $[X_j, P_k] = i\hbar\delta_{jk}$ die Vertauschungsrelation für die Π_i ab:

$$[\Pi_i, \Pi_j] = -ie\hbar\varepsilon_{ijk}B_k(\boldsymbol{X}) \quad .$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to R$ die Gleichung $[P_i, f(\boldsymbol{X})] = -i\hbar(\nabla_i f)(\boldsymbol{X})$ gilt. (3 Punkte)

b) Berechnen Sie $[H, \Pi_j]$ und $[H, X_j]$ mit H aus (1).
Hinweis: Sie könen Formel $\sum_k \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ verwenden. (4 Punkte)

c) Geben Sie im Heisenbergbild die Bewegungsgleichungen für $\boldsymbol{X}(t)$ und $\boldsymbol{\Pi}(t)$ an. (1 Punkt)

d) Geben Sie die quantenmechanische Form der Lorentz-Kraft an, indem Sie $m\, d^2\boldsymbol{X}/(dt^2)$ bestimmen. (1 Punkt)

Aufgabe 18: Landau-Niveaus (7 Punkte)

Betrachten Sie den Hamilton-Operator aus (1) mit $\Phi = 0$ und $\boldsymbol{A} = (0, Bx, 0)$ und zeitlich konstantem B.

a) Berechnen Sie $\boldsymbol{B}$. (1 Punkt)

b) Bringen Sie H in die Form

$$H = \frac{\Pi_3^2}{2m} + \hbar\omega_c(a^\dagger a + \tfrac{1}{2}) \quad \text{mit} \quad [a, a^\dagger] = 1 \quad .$$

Drücken Sie a durch Π_1 und Π_2 aus und bestimmen Sie die Zyklotronfrequenz ω_c. (4 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass die Energie-Eigenwerte (die sog. Landau-Niveaus) durch

$$E_{k_z,n} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \hbar\omega_c(n + \tfrac{1}{2})$$

mit $k_z \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben sind.
Hinweis: Die zeitunabhängige Schrödingergleichung kann mit dem Ansatz

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \psi(x_1, x_2, x_3) = \phi_3(x_3)\phi_{12}(x_1, x_2)$$

separiert werden. (2 Punkte)

Aufgabe 19: Bahndrehimpuls (4 Punkte)

Der Bahndrehimpuls-Operator ist $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{P}$.

a) Berechnen Sie $[X_j, L_k]$ und $[P_j, L_k]$. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie $[L_j, L_k]$. (2 Punkte)