Moderne Theoretische Physik I (Quantenmechanik I) SoSe 19

PROF. U. NIERSTE
DR. I. NISANDZIC

Übungsblatt 9
Abgabe 28.06.2019
Besprechung 03.07.2019

Name: Matrikel-Nr: Gruppe:

(Bitte ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 16: Kohärente Zustände (20 Punkte)

Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator,

$$H = \hbar\omega \left[a^\dagger a + \frac{1}{2} \right] \quad \text{mit} \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{X}{x_0} + i \frac{x_0 P}{\hbar} \right) \quad \text{und} \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \quad .$$

Kohärente Zustände $|\lambda\rangle$ sind Eigenzustände des Vernichtungsoperators:

$$a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad . \tag{1}$$

a) Berechnen Sie den Kommutator $[a, \exp(\lambda a^\dagger)]$ mit Hilfe der Formel (3) aus dem Übungsblatt 3. Zeigen Sie nun, dass

$$|\lambda\rangle \equiv N_\lambda e^{\lambda a^\dagger} |0\rangle$$

die Eigenwertgleichung (1) erfüllt. $N_\lambda > 0$ ist eine Normierungskonstante. (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie N_λ aus der Normierungsbedingung $\langle\lambda|\lambda\rangle = 1$.
Hinweis: Betrachten Sie $1 = \langle\lambda|\lambda\rangle = N_\lambda^* \langle 0| \exp[\lambda^* a]|\lambda\rangle$. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie $\langle X\rangle$, $\langle P\rangle$ sowie ΔX und ΔP im Zustand $|\lambda\rangle$.
Hinweis: Drücken Sie dazu die Operatoren X und P durch a und $a^\dagger$ aus. (4 Punkte)

d) Entwickeln Sie $|\lambda\rangle$ nach Energie-Eigenkets $|n\rangle$, also $|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|\lambda\rangle$. Es sei $P_n(\lambda)$ die Wahrscheinlichkeit, die Energie $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ im Zustand $|\lambda\rangle$ zu messen. Zeigen Sie, dass

$$P_n(\lambda) = \frac{(|\lambda|^2)^n}{n!} e^{-|\lambda|^2}$$

die Poissonverteilung ist. Welcher Messwert $\hat{E}$ ist der Wahrscheinlichste? Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\lambda|H|\lambda\rangle$. Ist er größer oder kleiner als $\hat{E}$?
Hinweis: Zur Bestimmung des Maximums der Poissonverteilung betrachten Sie das Verhältnis $P_{n+1}(\lambda)/P_n(\lambda)$. (2 Punkte)

e) Aus der bekannten Zeitentwicklung $|n,t\rangle = \exp[-iE_n t/\hbar]|n\rangle$ ergibt sich mit dem Ergebnis der Teilaufgabe (d) direkt die Zeitentwicklung von $|\lambda\rangle$. Zeigen Sie, dass $|\lambda,t\rangle$ durch

$$|\lambda,t\rangle = e^{-i\omega t/2}|\lambda(t)\rangle \quad \text{mit} \quad \lambda(t) = \lambda e^{-i\omega t}$$

gegeben ist. Wenn ein Zustand zum Zeitpunkt $t=0$ kohärent ist, bleibt er dann für $t>0$ kohärent? (2 Punkte)

f) Bestimmen Sie nun $\langle X\rangle$, $\langle P\rangle$ sowie ΔX und ΔP im Zustand $|\lambda,t\rangle$ aus Ihren Ergebnissen der Teilaufgaben (c) und (e). Schreiben Sie dabei $\lambda = |\lambda|\exp(i\delta)$. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis: Erfüllen $\langle X\rangle(t)$ und $\langle P\rangle(t)$ die klassischen Bewegungsgleichungen? (2 Punkte)

g) Berechnen Sie die Ortsdarstellung $\psi_\lambda(x,t) \equiv \langle x|\lambda,t\rangle$ des Zustandes $|\lambda,t\rangle$.
Hinweis: Lösen Sie zunächst die Eigenwertgleichung von a für $t=0$: $a\psi_\lambda(x) = \lambda\psi_\lambda(x)$. (3 Punkte)

h) Betrachten Sie für $l \in \mathbb{R}$:

$$|l\rangle \equiv \mathcal{T}_l|0\rangle \quad ,$$

wobei $\mathcal{T}_l = \exp[\frac{i}{\hbar}Pl]$ der Translationsoperator ist. Wie hängt $|l\rangle$ mit $|\lambda\rangle$ aus (1) zusammen? Sie dürfen dabei verwenden, dass

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2}$$

gilt, sofern $[A,B]$ sowohl mit A als auch mit B vertauscht. Geben Sie $\psi_l(x) := \langle x|l\rangle$ an. (3 Punkte)