Moderne Theoretische Physik (Quantenmechanik I) SoSe 19

Prof. U. Nierste
Dr. I. Nišandžić

Übungsblatt 8
Abgabe 21.06.2019
Besprechung 26.06.2019

Name: Matrikel-Nr: Gruppe-Nr:

(Bitte ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 15: Spinpräzession im Magnetfeld (20 Punkte)

a) Ein Teilchen mit Spin 1/2 und dem magnetischen Moment $\boldsymbol{\mu} = \gamma \boldsymbol{S}$ befinde sich in einem zeitlich konstanten Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ mit $\boldsymbol{B} = -\frac{1}{\gamma}\boldsymbol{\omega}$. Die Kets $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ beschreiben Zustände des Teilchens mit Spin $+\hbar/2$ bzw. $-\hbar/2$ in z-Richtung. Der Hamiltonoperator in der Basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ ist also

$$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{S}$$

mit $\boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$, wobei $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ die Pauli-Matrizen aus Aufgabe 6 sind. Zeigen Sie, dass

$$H^2 = \frac{\hbar^2}{4}\omega^2\, \mathbb{1}$$

mit $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$ ist. (2 Punkte)

b) Bringen Sie den Zeitentwicklungsoperator $U(t, 0) = \exp[-iHt/\hbar]$ in die Form

$$U(t, 0) = a \cos \frac{\omega t}{2} - b \sin \frac{\omega t}{2} \quad ,$$

und bestimmen Sie die 2×2-Matrizen a und b. (2 Punkte)

c) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System im Zustand $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle$. $\mathcal{P}_{\uparrow\uparrow}(t)$ sei die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Messung der z-Komponente des Spins zur Zeit t das Ergebnis $+\hbar/2$ ('up') zu erhalten. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{P}_{\uparrow\uparrow}(t) = 1 - \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega t}{2} \quad .$$

(2 Punkte)

d) Betrachten Sie nun (für $|\boldsymbol{n}| = 1$) einen beliebigen Vektor $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ und definieren Sie $\boldsymbol{a}_\perp = \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{n}$. Verifizieren Sie, dass $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{a}_\perp$ und $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{a}$ zueinander orthogonal sind. Berechnen Sie $|\boldsymbol{a}_\perp|^2$ und $|\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{a}|^2$. Betrachten Sie nun den Vektor $\boldsymbol{a}'$, der durch Rotation von $\boldsymbol{a}$ um die Achse $\boldsymbol{n}$ mit Winkel ϕ hervorgeht. Bestätigen Sie durch eine Zeichnung, dass $\boldsymbol{a}'$ gegeben ist durch

$$\boldsymbol{a}' = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} + \boldsymbol{a}_\perp \cos\phi + \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{a} \, \sin\phi \quad .$$

Berechnen Sie den durch

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\sigma} = e^{-i\phi \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2} (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}) e^{i\phi \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2}$$

definierten Vektor $\boldsymbol{b}$ mit Hilfe von von Gl. (7) und Gl. (8) aus Aufgabe 6:

$$(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{d})\mathbb{1} + i(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad , \tag{1}$$

wobei $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{\sigma} \equiv \sum_{i=1}^{3} c_i \sigma_i$ ist, und

$$e^{i\phi \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2} = \mathbb{1} \cos\tfrac{\phi}{2} + i(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \sin\tfrac{\phi}{2} \quad . \tag{2}$$

Wie hängt $\boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{a}'$ zusammen? (5 Punkte)

e) Wie verhält sich der Erwartungswert $\langle\psi(t)|\boldsymbol{S}|\psi(t)\rangle$ des Spinoperators $\boldsymbol{S}$ als Funktion der Zeit? Begründen Sie Ihre Aussage.

Hinweis: Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe (d) um zu zeigen, dass

$$e^{i\phi(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \sigma)/2} \sigma_i e^{-i\phi(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \sigma)/2} = [R_{\hat{\boldsymbol{n}}}(\phi)]_{ij} \sigma_j$$

ist, wobei $R_{\hat{\boldsymbol{n}}}(\phi)$ eine 3×3-Matrix ist, die eine Drehung um den Winkel ϕ bezüglich der Achse $\hat{\boldsymbol{n}}$ beschreibt. (3 Punkte)

f) Berechnen Sie den Zeitentwicklungsoperator $U(t, 0)$ für den Fall eines mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um die Achse $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$ rotierenden Magnetfeldes:

$$\boldsymbol{B}(t) = R_{\hat{\boldsymbol{\Omega}}}(\Omega t) \boldsymbol{B}_0 \quad .$$

$\boldsymbol{\mu}$ und H sind dabei wie in Teilaufgabe (a).

Hinweis: Hängt H von t ab, so ist $U(t, 0)$ *nicht* gleich $\exp[-iHt/\hbar]$. Lösen Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung mittels geeigneter Substitution. (6 Punkte)