Moderne Theoretische Physik I (Quantenmechanik I) SoSe 19

Prof. U. Nierste
Dr. I. Nišandžić

Übungsblatt 7
Abgabe 14.06.2019
Besprechung 19.06.2019

Name: Matrikel-Nr: Gruppe-Nr:

(Bitte ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 13: Zeitentwicklung im Potentialtopf (5 Punkte)

a) Betrachten Sie den Potenzialtopf aus Aufgabe 12. Begründen Sie, warum man die Wellenfunktion

$$\psi(x, t=0) = \sqrt{\frac{105}{16a^7}}\, x(a-x)(a+x)$$

im Intervall $-a \leq x \leq a$ schreiben kann als

$$\psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(0)}{\sqrt{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}. \tag{1}$$

Bestimmen Sie $c_n(0)$. (3 Punkte)

b) Lösen Sie die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung für die rechte Seite von (1), um $c_n(t)$ zu bestimmen. (2 Punkte)

Aufgabe 13: Teilchen im $\boldsymbol{\delta}$-Potential (15 Punkte)

Betrachten Sie den Hamilton-Operator eines Teilchens der Masse m in einem Potential $V(x) = -a\delta(x)$ mit $a > 0$ ist

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - a\delta(x) \quad .$$

Die Eigenwert-Gleichung

$$H\psi(x) = E\psi(x) \tag{2}$$

bestimmt die möglichen Bindungsenergien E des Teilchens. Dabei muß ψ eine stetige, quadratintegrable und fast überall differenzierbare Funktion sein.

a) Zeigen Sie, dass die Ableitung $\psi'(x)$ die Sprungbedingung

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \psi'(x) - \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \psi'(x) = \frac{2ma}{\hbar^2}\psi(0)$$

erfüllen muss, indem Sie (2) von $-\varepsilon$ bis ε (mit $\varepsilon > 0$) integrieren und dann ε gegen 0 gehen lassen. (2 Punkte)

b) Lösen Sie die Eigenwertgleichung (2) "stückweise". Definieren Sie dazu

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_- & \text{für } x < 0 \\ \psi_+ & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

und bestimmen Sie ψ_- und ψ_+ für beliebige $E \in \mathbb{R}$. Für welche Werte von E kann es quadratintegrable Lösungen für (2) geben? (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie mit Hilfe Ihres Ergebnisses aus (a) die möglichen Eigenwerte E. Wie viele Eigenwerte gibt es? (2 Punkte)

d) Geben Sie zu jedem Eigenwert E eine normierte Eigenfunktion ψ_E an. (2 Punkte)

e) Bestimmen Sie Erwartungswert und Unschärfe des Ortsoperators und des Impulsoperators für alle ψ_E. (4 Punkte)

f) Berechnen Sie für jeden Energieeigenwert E die Wahrscheinlichkeit dafür, ein Teilchen im Zustand $|\psi_E\rangle$ im Intervall $[-\frac{\hbar^2}{am}, +\frac{\hbar^2}{am}]$ anzutreffen. (2 Punkte)