Moderne Theoretische Physik I (Quantenmechanik I) SoSe 19

PROF. U. NIERSTE
DR. I. NIŠANDŽIĆ

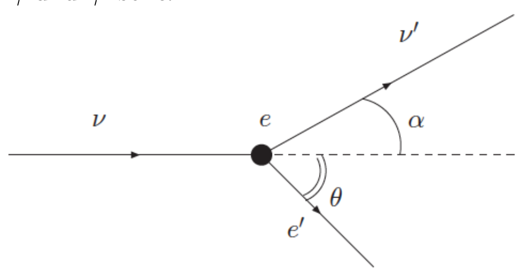
Übungsblatt 2
Abgabe 10.05.2019
Besprechung 15.05.2019

Name: Matrikel-Nr: Tutor(in):

(Bitte ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 3: Compton-Effekt (6 Punkte)

Ein Photon γ der Frequenz ν stoße auf ein ruhendes Elektron e der Masse m. Nach dem Stoß habe das gestreute Photon γ' die Frequenz ν' und das Elektron habe Impuls $\boldsymbol{p}'_e$ und Energie E'_e. Der Streuwinkel zwischen γ und γ' sei α.



a) (4 Punkte) Stellen Sie den Energieerhaltungssatz und den Impulserhaltungssatz auf. Fassen sie beide Gleichungen zusammen, indem Sie die Vierer-Impulsvektoren

$$p_\gamma^{(\prime)} = \begin{pmatrix} E_\gamma^{(\prime)}/c \\ \boldsymbol{p}_\gamma^{(\prime)} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad p_e^{(\prime)} = \begin{pmatrix} E_e^{(\prime)}/c \\ \boldsymbol{p}_e^{(\prime)} \end{pmatrix}$$

betrachten. Berechnen Sie nun $(p_\gamma - p'_\gamma)^2$ und $(p_e - p'_e)^2$. Drücken Sie in Ihren Ergebnissen $|\boldsymbol{p}_\gamma^{(\prime)}|$, E'_e und $|\boldsymbol{p}'_e|$ durch $E_\gamma^{(\prime)}$, und die Elektronmasse m aus.

b) (2 Punkte) Leiten Sie aus Ihrem Ergebnis der Teilaufgabe a) die Compton-Formel

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}\,(1 - \cos\alpha)$$

ab. Dabei sind λ und λ' die Wellenlängen des einlaufenden und gestreuten Photons. $h/(mc) = 2.4 \times 10^{-10}$ cm ist die Compton-Wellenlänge des Elektrons.

Aufgabe 4: Photonen-Zustände (14 Punkte)

a) (2 Punkte) Die Matrixdarstellung $a_{jk} = \langle e_j|A|e_k\rangle$ eines Operators A bzgl. der Orthonormalbasis $\{|e_1\rangle, \dots |e_N\rangle\}$ (für $\dim \mathcal{H} = N$). Beweisen Sie

$$A = \sum_{j,k} a_{jk} |e_j\rangle\langle e_k| = \sum_{j,k} |e_j\rangle a_{jk} \langle e_k|.$$

Hinweis: Haben die Operatoren A und B die selbe Matrixdarstellung, so gilt $A = B$.

b) (2 Punkte) Die Zustände $|\varepsilon_x\rangle$, $|\varepsilon_y\rangle$ und $|\varepsilon_\phi\rangle = \cos\phi|\varepsilon_x\rangle + \sin\phi|\varepsilon_y\rangle$ beschreiben linear in $\boldsymbol{e}_x$-, $\boldsymbol{e}_y$- und $\cos\phi\boldsymbol{e}_x + \sin\phi\boldsymbol{e}_y$-Richtung polarisierte Photonen. Betrachten Sie den Operator

$$P_\phi \quad = \quad |\varepsilon_\phi\rangle\langle\varepsilon_\phi|.$$

Berechnen Sie die Matrixdarstellung p_ϕ von P_ϕ bzgl. $\{|\varepsilon_x\rangle, |\varepsilon_y\rangle\}$.

c) (2 Punkte) Licht sei in $\cos\alpha\boldsymbol{e}_x + \sin\alpha\boldsymbol{e}_y$-Richtung polarisiert. Der Erwartungswert einer Messung der Polarisation in $\cos\phi\boldsymbol{e}_x + \sin\phi\boldsymbol{e}_y$-Richtung ist dann durch $w_\phi(\alpha) = \langle\varepsilon_\alpha|P_\phi|\varepsilon_\alpha\rangle$ gegeben. Berechnen Sie diesen Erwartungswert sowie die Unschärfe $\Delta P_\phi(\alpha) = \sqrt{\langle\varepsilon_\alpha|P_\phi^2|\varepsilon_\alpha\rangle - w_\phi(\alpha)^2}$. Für welche α finden Sie maximale und minimale Unschärfe?

d) (2 Punkte) Ein links-zirkular bzw. rechts-zirkular polarisiertes Photon wird durch

$$|\varepsilon_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\varepsilon_x\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\varepsilon_y\rangle \qquad \text{bzw.} \qquad |\varepsilon_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\varepsilon_x\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|\varepsilon_y\rangle$$

beschrieben. Der Basiswechsel $\{|\varepsilon_x\rangle, |\varepsilon_y\rangle\} \to \{|\varepsilon_L\rangle, |\varepsilon_R\rangle\}$ sei durch $|\varepsilon_L\rangle = U|\varepsilon_x\rangle$ und $|\varepsilon_R\rangle = U|\varepsilon_y\rangle$ gegeben. Zeigen Sie anhand der Matrixdarstellung von U bzgl. $\{|\varepsilon_x\rangle, |\varepsilon_y\rangle\}$, dass U unitär ist.

e) (2 Punkte) Berechnen Sie $w_\phi(L) = \langle\varepsilon_L|P_\phi|\varepsilon_L\rangle$ und $\Delta P_\phi(L) = \sqrt{\langle\varepsilon_L|P_\phi^2|\varepsilon_L\rangle - w_\phi(L)^2}$.

f) (2 Punkte) Betrachten Sie die Operatoren

$$P_L = |\varepsilon_L\rangle\langle\varepsilon_L| \qquad \text{und} \qquad P_R = |\varepsilon_R\rangle\langle\varepsilon_R|$$

und berechnen Sie die Matrixdarstellungen p_L und p_R bzgl. $\{|\varepsilon_x\rangle, |\varepsilon_y\rangle\}$. Ist $p_{L,R}$ hermitisch? Berechnen Sie $p_L{\cdot}p_R$, $p_R{\cdot}p_L$ sowie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $p_{L,R}$ und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

g) (2 Punkte) $|\varepsilon_L\rangle$ und $|\varepsilon_R\rangle$ sind Zustände mit *Helizität* $h = -1$ und $h = 1$.[1] Sie sind also Eigenzustände des Helizitätsoperators H mit $H|\varepsilon_L\rangle = -|\varepsilon_L\rangle$ und $H|\varepsilon_R\rangle = +|\varepsilon_R\rangle$. Berechnen Sie die Matrixdarstellung von H bzgl. $\{|\varepsilon_x\rangle, |\varepsilon_y\rangle\}$ und bestimmen Sie die Erwartungswerte und Unschärfen von H für die Zustände $|\varepsilon_x\rangle$ und $|\varepsilon_y\rangle$.

[1] Zur physikalischen Bedeutung: Die Helizität ist die Projektion des Drehimpulses auf die Bewegungsrichtung des Photons.