Quantenmechanik I SS 19

Prof. U. Nierste
Dr. I. Nišandžić

Übungsblatt 1
Abgabe 03.05.2019
Besprechung 08.05.2019

Name: Matrikel-Nr: Gruppe:

(Bitte ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 1: Sätze über hermitesche Matrizen

Sei A eine hermitesche $n \times n$ Matrix.

a) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von A reell sind.

b) Zeigen Sie, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A orthogonal sind.

c) Zeigen Sie, dass man stets eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A konstruieren kann. Zeigen Sie dazu zunächst, dass A stets mindestens einen Eigenwert λ besitzt. Definieren Sie dann den Eigenraum zu λ,

$$E_\lambda = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n : A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}\} \subset \mathbb{C}^n \quad ,$$

und zeigen Sie, dass E_λ ein Vektorraum ist. Betrachten Sie dann das orthogonale Komplement von E_λ,

$$E_\lambda^\perp = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n : \boldsymbol{v}^\dagger \boldsymbol{u} = 0 \ \forall \boldsymbol{v} \in E_\lambda\} \quad ,$$

und zeigen Sie, dass $E_\lambda^\perp$ ein A-invarianter Unterraum ist, also

$$A\boldsymbol{u} \in E_\lambda^\perp \quad \forall \boldsymbol{u} \in E_\lambda^\perp$$

gilt. Folgern Sie daraus die Behauptung.

d) Zeigen Sie, dass eine unitäre Matrix U und eine Diagonalmatrix D existieren mit

$$U^\dagger A U = D \quad .$$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen U, D und den Eigenwerten und Eigenvektoren von A?

e) Sei B eine weitere hermitesche $n \times n$ Matrix, die mit A kommutiert, also

$$[A, B] = AB - BA = 0$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass eine Orthonormalbasis aus *gemeinsamen* Eigenvektoren von A und B existiert, also eine Basis $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ von $\mathbb{C}^n$ mit $A\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ und $B\boldsymbol{v}_i = \mu_i \boldsymbol{v}_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$. Wie lässt sich dieses Ergebnis auf einen Satz von m kommutierenden hermiteschen Matrizen $A_1, \ldots A_m$ (mit $[A_i, A_j] = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$) erweitern?

Aufgabe 2: Exponentialreihe für Matrizen

Die Exponentialfunktion für Matrizen ist analog zur Exponentialfunktion für komplexe Zahlen über die Exponentialreihe definiert:

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

a) Zeigen Sie, dass für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{d}{d\alpha} \exp(\alpha A) = A \exp(\alpha A) \quad .$$

b) Berechnen Sie $\exp(-i\alpha A)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad .$$