Moderne Theoretische Physik I (Quantenmechanik I) SS 19

Prof. Dr. U. Nierste
Dr. I. Nišandžić

Übungsblatt 1
Abgabe 03.05.2019
Besprechung 08.05.2019

Name: Matrikel-Nr: Tutor(in):

(Bitte ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 1: Sätze über hermitesche Matrizen

Sei A eine hermitesche $n \times n$ Matrix.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von A reell sind.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A orthogonal sind.

c) (1 Punkt) Betrachten Sie nun einen m-fach entarteten Eigenwert $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \ldots \lambda_{i+m-1}$ mit linear unabhängigen Eigenvektoren $v^{(k)}$, $k = i, \ldots i + m - 1$. Warum können Sie diese Eigenvektoren immer so wählen, dass $v^{(k)\dagger} v^{(l)} = 0$ für $k \neq l$ gilt?

d) (2 Punkte) Konstruieren Sie eine unitäre Matrix U, die A diagonalisiert:

$$U^\dagger A U = D,$$

wobei D eine Diagonalmatrix ist. Welcher Zusammenhang besteht zwischen U, D und den Eigenwerten und Eigenvektoren von A?

e) (2 Punkte) Sei B eine weitere hermitesche $n \times n$ Matrix, die mit A kommutiert, also

$$[A, B] = AB - BA = 0$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass die Matrizen A und B simultan diagonalisiert werden können.

f) (1 Punkt) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an, die A und B erfüllen müssen, damit

$$e^{\lambda(A+B)} = e^{\lambda A} e^{\lambda B}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Begründen Sie Ihre Antwort. Hinweis: Denken Sie an den binomischen Lehrsatz.

Aufgabe 2: Exponentialreihe für Matrizen

Die Exponentialfunktion für Matrizen ist analog zur Exponentialfunktion für komplexe Zahlen über die Exponentialreihe definiert:

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{d}{d\alpha} \exp(\alpha A) = A \exp(\alpha A).$$

b) (1 Punkt) Berechnen Sie $\exp(-i\alpha A)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$