Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. Jaquier, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 13

Ausgabe: 19.07 – Abgabe: nicht zutreffend – Besprechung: online ab 26.07

– Auf Lösungen bitte Name, Matrikelnummer, Tutoriumnummer sowie Tutor(in) vermerken –

Aufgabe 1: Teller

Wir entwenden aus der Küche einen dünnen kreisförmigen Teller mit dem Radius R und einer homogenen Massendichte, sodass die Gesamtmasse des Tellers m beträgt. Wir positionieren den Teller in der x, y-Ebene mit dem Zentrum im Ursprung.

(a) Was ist das (skalare) Trägheitsmoment des Tellers um die z-Achse?

(b) Was ist das (skalare) Trägheitsmoment des Tellers um die x-Achse? Und um die y-Achse?

(c) Betrachten Sie eine Achse parallel zur z-Achse durch den Rand des Tellers. Berechnen Sie das (skalare) Trägheitsmoment des Tellers um diese neue Achse.

(d) Beantworten Sie die vorherige Frage durch das direkte Lösen des Integrals und überprüfen Sie die Übereinstimmung mit dem vorherigen Resultat.

(e) Nun bohren wir ein Loch mit dem Radius q an der Stelle $(r, 0, 0)$ in den Teller, so dass $q < r$ und $q + r < R$. Was sind nun die (skalare) Trägheitsmomente des Tellers um die x-, y-, und z-Achse?

(f) Nachdem wir den Teller gegen einen neuen ohne Loch ersetzt haben, stellen wir diesen aufrecht auf dem Boden, und drehen es mit Kreisfrequenz ω um seine x-Achse. Was ist die kinetische Energie des Tellers?

(g) Nun nehmen wir den Teller und lassen ihn mit der Geschwindigkeit v rollen. Was ist seine kinetische Energie?

Aufgabe 2: Polygon

Wir betrachten ein homogenes dünnes regelmäßiges Polygon mit der Masse m, der Fläche A und mit N Seiten.

(a) Berechnen Sie das (skalare) Trägheitsmoment I_N des Polygons um die senkrechte Achse durch das Zentrum.

(b) Zeigen Sie, dass sich mit dem allgemeinen Resultat der vorherigen Frage die Trägheitsmomente eines Quadrats und eines Kreises reproduzieren lassen:

$$I_{\text{Quadrat}} = \frac{mA}{6} , \qquad I_{\text{Kreis}} = \frac{mA}{2\pi} . \tag{2.1}$$

Hinweis: Verwenden Sie $\lim_{N\to\infty} N \tan(\pi/N) = \pi$.

Lösung der Aufgabe 1

(a) $\boxed{\text{1 point}}$ *I around the z axis*
Let us start by finding the areal mass density

$$
\begin{aligned}
m &= \int \rho dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho r d\theta dr = 2\pi\rho \int_0^R r dr = \pi\rho R^2 \Leftrightarrow \\
\rho &= \frac{m}{\pi R^2} \ .
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

We may then find the moment of inertia around the z axis:

$$
I_z = \int \rho r^2 dA = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2}\frac{1}{4}R^4 = \frac{1}{2} m R^2 \ . \tag{1.2}
$$

(b) $\boxed{\text{1 point}}$ *I around the x and y axis*
Around the x axis:

$$
\begin{aligned}
I_x &= \int \rho y^2 dA = \frac{m}{\pi R^2} \int_{-R}^{R} dx \ 2 \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \ y^2 = \frac{2m}{\pi R^2} \int_{-R}^{R} dx \tfrac{1}{3} (\sqrt{R^2 - x^2})^3 \\
&= \frac{2mR^2}{3\pi} \int_{-1}^{1} (\sqrt{1 - \xi^2})^3 d\xi = \frac{mR^2}{4} \ .
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

The problem is symmetric is x and y, so around the y axis the result is clearly the same, $I_y = \frac{mR^2}{4}$

(c) $\boxed{\text{1 point}}$ *I around new vertical axis*
The parallel axis theorem says

$$
I_v = md^2 + I_{\text{cm}} = mR^2 + \frac{1}{2} mR^2 = \frac{3}{2} mR^2 \tag{1.4}
$$

(d) $\boxed{\text{1 point}}$ *I around new vertical axis by direct calculation*
We can parametrise the circle by k and ϕ where k is the distance to the axis. "Thales' theorem" tells us that the upper limit of the k integration is $2R \sin\phi$. Therefore

$$
\begin{aligned}
I_v &= \int \rho k^2 dA = \frac{m}{\pi R^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \int_0^{2R\sin\phi} dk \, k^3 = \frac{4mR^2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \sin^4\phi \\
&= \frac{3mR^2}{2}
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

(e) $\boxed{\text{2 points}}$ *Drilled hole*
The trick here is to consider the hole as another plate with negative mass density glued onto the original plate. That hole-plate has the mass

$$
-\rho\pi q^2 = -m\frac{q^2}{R^2} \tag{1.6}
$$

Around its own center of mass it has

$$I_{hz} = -m\frac{q^4}{2R^2} \qquad I_{hx} = I_{hy} = -m\frac{q^4}{4R^2} \tag{1.7}$$

and taking into account the displacement from the center of the original plate, it has around that point

$$I_{hz} = -m\frac{q^2r^2}{R^2} - m\frac{q^4}{2R^2}\,, \qquad I_{hx} = -m\frac{q^4}{4R^2}\,, \qquad I_{hy} = -m\frac{q^2r^2}{R^2} - m\frac{q^4}{4R^2} \tag{1.8}$$

This means that the combined plate has moments of inertia that are the sum of the two:

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{mR^2}{2}\left(1 - \frac{q^4}{R^4} - \frac{2q^2r^2}{R^4}\right) \\ I_x &= \frac{mR^2}{4}\left(1 - \frac{q^4}{R^4}\right) \\ I_y &= \frac{mR^2}{4}\left(1 - \frac{q^4}{R^2} - \frac{4q^2r^2}{R^4}\right) \end{aligned} \tag{1.9}$$

If the hole is considered small on may discard the q^4 terms.

(f) $\boxed{\text{1 point}}$ *Rotating around x*

$$E = \tfrac{1}{2}I_x\omega^2 = \frac{mR^2\omega^2}{8} \tag{1.10}$$

(g) $\boxed{\text{1 point}}$ *Rolling*
When something rolls, the point that touches the floor is stationary, so $v = -\omega R$. The kinetic energy is given by

$$T = T_{\text{rot}} + T_{\text{trans}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_z\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mR^2(-\tfrac{v}{R})^2 = \frac{3}{4}mv^2 \tag{1.11}$$

Lösung der Aufgabe 2

(a) $\boxed{\text{2 points}}$ *Moment of inertia polygon*
Use the symmetry of the problem and split up the polygon into N triangles, each triangle having two corners at the endpoints of a given side of the polygon and the third endpoint at the center of the polygon. By symmetry, the moment of inertia of the polygon is equal to N times the moments of inertia of each of these triangles: $I_N = NI_{\text{tri}}$.

A given triangle has area A/N and opening angle (at the center) $2\pi/N$. Its moment of inertia is

$$I_{\text{tri}} = \int dm\ r^2 = \mu \int_0^b dy \int_{-y\tan(\pi/N)}^{y\tan(\pi/N)} dx\ (x^2+y^2) \tag{2.2}$$

$$= 2\mu \int_0^b dy \int_0^{y\tan(\pi/N)} dx\ (x^2+y^2)\ , \tag{2.3}$$

where μ is the constant mass density $\mu = m/A$ and b is the shortest distance between the center and the edge of the polygon, which satisfies $b^2 = (A/N)(1/\tan(\pi/N))$. Performing the integral is easy and gives

$$\begin{aligned} I_{\text{tri}} &= 2(m/A)\int_0^b dy\ \left(\frac{1}{3}y^3\tan^3(\pi/N) + y^3\tan(\pi/N)\right) \\ &= 2(m/A)\tan(\pi/N)\left(\frac{1}{3}\tan^2(\pi/N)+1\right)\frac{1}{4}b^4 \\ &= \frac{mA}{2N^2}\left[\frac{\tan(\pi/N)}{3} + \frac{1}{\tan(\pi/N)}\right]\ . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Multiplying by N, we finally get

$$I_N = \frac{mA}{2}\left[\frac{\tan(\pi/N)}{3N} + \frac{1}{N\tan(\pi/N)}\right]\ . \tag{2.5}$$

(b) $\boxed{\text{2 points}}$ *Reproduce square and circle*
Setting $N=4$ and using $\tan(\pi/4)=1$, we find

$$I_{\text{square}} = I_4 = \frac{mA}{2}\left[\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right] = \frac{mA}{6}\ , \tag{2.6}$$

which is the moment of inertia of the square around the axes perpendicular to the square, passing through its center.
In the limit $N\to\infty$ the polygon becomes a perfect circle. In this limit, the term $\frac{\tan(\pi/N)}{3N}$ tends to zero, while $\frac{1}{N\tan(\pi/N)}$ tends to $1/\pi$. Therefore

$$I_{\text{circle}} = \lim_{N\to\infty} I_N = \frac{mA}{2}\left[0+\frac{1}{\pi}\right] = \frac{mA}{2\pi}\ . \tag{2.7}$$