Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. Jaquier, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 12

Ausgabe: 12.07 – Abgabe: 19.07 @ 09:45 Uhr – Besprechung: 22.07 & 23.07

– Auf Lösungen bitte Name, Matrikelnummer, Tutoriumnummer sowie Tutor(in) vermerken –

Aufgabe 1: Anharmonischer Oszillator

7 Punkte

In der Vorlesung wurde gezeigt, wie sich die Beziehung zwischen den alten und den neuen Koordinaten und Impulse unter einer kanonischen Transformation $\{p, q\} \to \{P, Q\}$, kompakt durch die erzeugende Funktion $F(q, Q, t)$ beschreiben lässt, wobei

$$\frac{\partial F}{\partial q} = p \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial Q} = -P \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial t} = K - H\,. \tag{1.1}$$

Die Abhängigkeit der erzeugenden Funktion von q und Q ist dabei aber nicht die einzige Wahl. Möglich sind ebenfalls erzeugende Funktionen $F_2(q, P, t)$, $F_3(p, Q, t)$ und $F_4(p, P, t)$. In dieser Aufgabe betrachten wir einen anharmonischen Oszillator, der durch die Hamiltonsche Funktion

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m}(1 + \epsilon\beta q) + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2(1 + \epsilon\alpha q) \tag{1.2}$$

beschrieben wird, wobei ϵ eine kleine dimensionslose Konstante ist. Wir untersuchen nun die kanonische Transformation, welche durch die erzeugende Funktion $F_2(q, P, t)$ beschrieben wird.

(a) Für die erzeugende Funktion $F(q, Q, t)$ impliziert das Verschwinden der Variation der Wirkung die folgende Bedingung:

$$\mathrm{d}F(q, Q, t) = p\,\mathrm{d}q - P\mathrm{d}Q + (K - H)\mathrm{d}t, \tag{1.3}$$

wobei $K(P, Q)$ die Hamiltonsche Funktion für die neuen Koordinaten ist. Addieren Sie das Differential $\mathrm{d}(PQ)$ zu beiden Seiten der obigen Gleichung und schreiben Sie die rechte Seite als ein Differential einer Funktion der Variablen q, P und t um. Identifizieren Sie die linke Seite mit $\mathrm{d}F_2(q, P, t)$ und leiten Sie daraus die Beziehungen

$$\frac{\partial F_2}{\partial q} = p \quad , \quad \frac{\partial F_2}{\partial P} = Q \quad , \quad \frac{\partial F_2}{\partial t} = K - H \tag{1.4}$$

her.

(b) Welche Transformation wird durch $F_2(q, P, t) = qP$ generiert?

(c) Betrachten wir nun die erzeugende Funktion, mit

$$F_2(q, P, t) = qP + \epsilon a q^2 P + \epsilon b P^3\ . \tag{1.5}$$

Bestimmen Sie die Werte von a und b, so dass $K(Q, P)$, bis zur Ordnung ϵ^2, die Hamiltonsche Funktion eines harmonischen Oszillators ist.

(d) Drücken Sie $q(t)$ durch die bekannten sinusförmigen Lösungen des harmonischen Oszillators aus.

(e) Für bestimmte Werten von α und β beschreibt die Hamiltonsche Funktion in Gleichung (1.2) das gleiche System (bis zur Ordnung ϵ^2) wie die Lagrange Funktion

$$L = \tfrac{1}{2}m(1+\gamma x)\dot{x}^2 - \tfrac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \tag{1.6}$$

aus Aufgabe 2 von Blatt 10. Bestimmen Sie die Werte von α und β. Verifizieren Sie, dass die Lösung $x(t)$ in Aufgabe 2 von Blatt 10 entsprechend ein Spezialfall der Lösung für $q(t)$ in dieser Aufgabe darstellt.

Aufgabe 2: Oberfläche im Phasenraum — 6 Punkte

Betrachten wir den harmonischen Oszillator, der durch die Hamilton Funktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}mq^2\omega^2 \tag{2.1}$$

beschrieben wird.

(a) Überprüfen Sie, dass

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin(\omega t + \theta_0)\,, \qquad p = \sqrt{2Em}\cos(\omega t + \theta_0)\,, \tag{2.2}$$

die Hamilton Gleichungen lösen.

(b) Skizzieren Sie den Pfad einer Schwingung im (q,p) Phasenraum, und geben Sie dabei die Abhängigkeit von E und t an.

(c) Sei m und ω präzise bekannt. Die Energie liege innerhalb des Bereiches zwischen E_0 und $E_0 + \mathrm{d}E$. Die Zeit liege ebenfalls zwischen t_0 und $t_0 + \mathrm{d}t$. Betrachten Sie die Abbildung $\{p,q\} \to \{E,t\}$ und bestimmen Sie den Flächeninhalt der Oberfläche im (q,p)-Phasenraum, in dem sich das Teilchen befinden kann, in Abhängigkeit von $\mathrm{d}E$ und $\mathrm{d}t$. Hinweis: Betrachten Sie die Änderung einer infinitesimalen Oberfläche unter Variablensubstitution.

(d) Führen wir nun eine kanonische Transformation, zu den neuen Variablen Q und P aus, die durch die erzeugende Funktion

$$F = \frac{m\omega}{2}q^2\cot(Q)\,, \tag{2.3}$$

definiert ist. (Hierbei ist cot der Kotangens $\cot(z) = \cos(z)/\sin(z)$.) Finden Sie Ausdrücke für q und p in Abhängigkeit von Q und P.

(e) Finden Sie Ausdrücke für Q und P.

(f) Skizzieren Sie den Pfad einer Schwingung im (Q,P) Phasenraum, und berechnen Sie den Flächeninhalt der Oberfläche auf der sich das Teilchen befinden kann, falls es die vorher besprochene ΔE und Δt Unbestimmtheit besitzt.