Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. Jaquier, Dr. R. Rietkerk

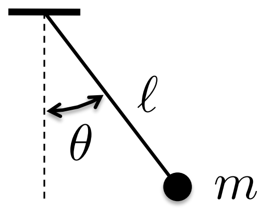
Übungsblatt 10

Ausgabe: 28.06 – Abgabe: 05.07 @ 09:45 Uhr – Besprechung: 08.07 & 09.07

– Auf Lösungen bitte Name, Matrikelnummer, Tutoriumnummer sowie Tutor(in) vermerken –

Aufgabe 1: Korrektur zur Pendelbewegung **6 Punkte**

In dieser Aufgabe betrachten wir ein Pendel der Länge ℓ und Masse m welcher unter dem Einfluss der Schwerkraft oszilliert. Ziel der Aufgabe ist es, die erste Korrektur zur Winkelfrequenz $\omega_0^2 = g/\ell$ in die Näherung kleiner Winkel zu bestimmen.



(a) Konstruieren Sie die Lagrange Funktion für das Pendel als Funktion des Winkels θ. Bestimmen Sie daraus die Bewegungsgleichung.

(b) Entwickeln Sie die Bewegungsgleichung bis zur zweiten Ordnung in die Näherung kleiner Winkel und zeigen Sie, dass

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \tfrac{1}{6}\omega_0^2\theta^3 + \mathcal{O}(\theta^5)\,. \tag{1.1}$$

Wir führen einen kleinen Parameter ϵ ein, welcher formal ausdrückt, dass θ^3 viel kleiner als θ ist. Danach lässt die Bewegungsgleichung sich schreiben als

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = \epsilon\,\omega_1^2\theta + \epsilon^2\left(\omega_2^2\theta + \tfrac{1}{6}\omega_0^2\theta^3\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3)\,, \tag{1.2}$$

wobei die die exakte Winkelfrequenz ω durch die Entwicklung

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \epsilon\,\omega_1^2 + \epsilon^2\omega_2^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{1.3}$$

gegeben ist.

(c) Entwickeln Sie in Gleichung (1.2) den Winkel θ entsprechend in ϵ,

$$\theta = \theta_0 + \epsilon\,\theta_1 + \epsilon^2\theta_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)\,, \tag{1.4}$$

und leiten Sie die Gleichungen

$$\ddot{\theta}_0 + \omega^2\theta_0 = 0\,, \tag{1.5}$$
$$\ddot{\theta}_1 + \omega^2\theta_1 = \omega_1^2\theta_0\,, \tag{1.6}$$
$$\ddot{\theta}_2 + \omega^2\theta_2 = \omega_1^2\theta_1 + \omega_2^2\theta_0 + \tfrac{1}{6}\omega_0^2\theta_0^3\,, \tag{1.7}$$

her.

(d) Schreiben Sie die Lösung von Gleichung (1.5) als

$$\theta_0 = A\cos(\omega t + \phi)\,. \tag{1.8}$$

Gleichung (1.6) ist dann von der Form $\ddot{\theta}_1 + \omega^2\theta_1 = F(t)/m$ und beschreibt eine erzwungene Schwingung. Bestimmen Sie die partikuläre Lösung

$$\theta_{1,p} = \int_0^t d\tau \frac{F(\tau)}{m\omega}\sin(\omega(t-\tau))\,. \tag{1.9}$$

und zeigen Sie, dass die Amplitude von $\theta_{1,p}$ linear in die Zeit wächst. Argumentieren Sie, dass diese scheinbare Resonanz im Gegensatz zu der Annahme der Näherung kleiner Winkel nur vermieden werden kann, falls

$$\omega_1^2 = 0\,. \tag{1.10}$$

(e) Leiten Sie wiederum aus der Abwesenheit von Resonanz in Gleichung (1.7) her, dass

$$\omega_2^2 = -\tfrac{1}{8}\omega_0^2 A^2\,. \tag{1.11}$$

Hinweis: $\cos^3(\alpha) = \frac{1}{4}\cos(3\alpha) + \frac{3}{4}\cos(\alpha)$.

(f) Zeigen Sie damit, dass die Periode der Pendelbewegung durch

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{A^2}{16} + \mathcal{O}(A^3)\right) \tag{1.12}$$

gegeben ist. Wie groß ist die Korrektur von $\mathcal{O}(A^2)$ in die Periode bei einer Amplitude von 30 Grad? Und bei 90 Grad?

Aufgabe 2: Anharmonischer kinetischer Term — 4 Punkte

Ein Oszillator hat einen kinetischen Term mit einem kleinen positions-abhängigen Beitrag, so dass

$$L = \tfrac{1}{2}m(1+\gamma x)\dot{x}^2 - \tfrac{1}{2}m\omega_0^2 x^2\ . \tag{2.1}$$

(a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung. Schreiben Sie sie um auf die Form

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\epsilon\,\gamma\left(\tfrac{1}{2}\dot{x}^2 + x\ddot{x}\right) + \epsilon\,\omega_1^2 x + \mathcal{O}(\epsilon^2)\,, \tag{2.2}$$

wobei ϵ hilft die Größenordnungen zu identifizieren, und wobei

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \epsilon\,\omega_1^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2)\,. \tag{2.3}$$

(b) Entwickeln Sie $x = x_0 + \epsilon\, x_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ und leiten Sie her, dass

$$x = A\cos(\omega t + \phi) + \tfrac{1}{4}\gamma A^2\big[1 - \cos(2\omega t + 2\phi)\big] + \mathcal{O}(A^3)\,. \tag{2.4}$$

Aufgabe 3: Getriebene anharmonische Schwingungen **4 Punkte**

In dieser Aufgabe werden kleine Schwingungen eines harmonischen Oszillators mit einer anharmonischen Störung $\alpha\xi^2$ betrachtet, auf welchem eine treibende Kraft mit zwei Frequenzen Ω_1 und Ω_2 wirkt:

$$\ddot{\xi} + \omega^2\xi = -\alpha\xi^2 + f_1\cos(\Omega_1 t + \phi_1) + f_2\cos(\Omega_2 t + \phi_2) \quad , \quad \Omega_1, \Omega_2 \neq \omega. \tag{3.1}$$

Dabei sind f_1 und f_2 Konstanten von der gleichen Grössenordnung wie die Amplitude ξ der Schwingungen. In diesem Fall treten in den partikulären Lösungen nebst den beiden Frequenzen Ω_1 und Ω_2 noch weitere Frequenzen auf.

(a) Für kleine Schwingungen ist der anharmonische Term $-\alpha\xi^2$ klein im Vergleich zu den anderen Termen in der Gleichung. Um dies formal zu beschreiben wird ein kleiner Parameter $\epsilon \ll 1$ eingeführt, und der anharmonische Term als $-\epsilon\alpha\xi^2$ geschrieben. Verwenden Sie den Ansatz

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \epsilon\xi_1(t) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{3.2}$$

in die obige differentialgleichung und entwickeln Sie sie bis zur ersten Ordnung in ϵ. Schreiben Sie für jede Ordnung die zugehörige Gleichung auf.

(b) Im Folgenden sind wir an den Frequenzen der partikulären Lösungen interessiert und lassen die homogenen Lösungen weg (in realistischen Situationen unterliegen die homogenen Lösungen der Reibung und können nach einiger Zeit vernachlässigt werden). Verwenden Sie die Form der treibenden Kraft als Ansatz für die partikuläre Lösung $\xi_{0,p}$ der Gleichung nullter Ordnung und zeigen Sie, dass $\xi_{0,p}(t)$ durch

$$\xi_{0,p}(t) = \frac{f_1\cos(\Omega_1 t + \phi_1)}{(\omega^2 - \Omega_1^2)} + \frac{f_2\cos(\Omega_2 t + \phi_2)}{(\omega^2 - \Omega_2^2)} \tag{3.3}$$

gegeben ist.

(c) Setzen Sie nun den Ausdruck für $\xi_{0,p}$ in die Gleichung erster Ordnung in ϵ ein und drücken Sie alle Produkte von trigonometrischen Funktionen durch einzelne Funktionen aus. Verfahren Sie wie in der vorherigen Teilaufgabe um einen Ansatz für die partikuläre Lösung $\xi_{1,p}$ zu finden und bestimmen Sie diese. Welche Frequenzen tauchen auf?

(d) Welche Frequenzen erwarten Sie, wenn höhere Ordnungen in ϵ berücksichtigt werden?