Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. Jaquier, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 9

Ausgabe: 21.06 – Abgabe: 28.06 @ 09:45 Uhr – Besprechung: 01.07 & 02.07

– Auf Lösungen bitte Name, Matrikelnummer, Tutoriumnummer sowie Tutor(in) vermerken –

Aufgabe 1: Dreiatomiges Molekül — 9 Punkte

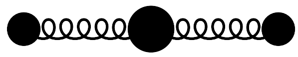

Abbildung 1

In dieser Aufgabe modellieren wir ein geradliniges dreiatomiges Molekül mit einem zentralen Atom der Masse M und zwei identischen Atomen der Masse m an den Endpunkten. Ein Beispiel eines solchen Moleküls ist CO_2. Wir modellieren die atomischen Kräfte zwischen dem zentralen Atom und den Seitenatomen als Federn mit Federkonstante k, welche in Ruhelage eine Länge ℓ haben. Wir betrachten nur die Bewegung entlang der Symmetrieachse des Moleküls, was das Problem eindimensional macht. Wir bezeichnen die Position des zentralen Atoms als q_2 und die Position der Seitenatome als q_1 und q_3.

(a) Das von einer Feder verursachte Potential ist gegeben durch $U = \frac{k}{2}u^2$, wobei u die Auslenkung aus der Ruhelage bezeichnet. Wie lautet die Lagrangefunktion in Abhängigkeit der Koordinaten $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$?

(b) Wir führen neue Koordinaten $\vec{\xi} = \vec{q} - \vec{q}_0$ relativ zur Ruhelage ein, wobei $\vec{q}_0 = (-\ell, 0, \ell)$. Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion die Form

$$L = \sum_{i,j} \left(\tfrac{1}{2} m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - \tfrac{1}{2} k_{ij} \xi_i \xi_j \right) \tag{1.1}$$

hat, und bestimmen Sie damit die 3×3 Matrizen $\hat{m}$ und $\hat{k}$. Vergewissern Sie sich, dass $\hat{m}$ und $\hat{k}$ symmetrisch sind.

(c) Lösen Sie die zu Gleichung (1.1) gehörige Euler-Lagrange Gleichungen mit einem Kosinus als Ansatz, $\vec{\xi}_s = \vec{a}_s \cos(\omega_s t + \varphi)$. Zeigen Sie, dass die Amplituden $\vec{a}$ die Gleichung

$$\left(-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k} \right) \vec{a}_s = 0 \tag{1.2}$$

erfüllen.

(d) Ein solches Gleichungssystem erlaubt nur von Null verschiede Lösungen für $\vec{a}_s$, wenn $\det(-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k}) = 0$. Warum ist das so?

(e) Berechnen Sie $\det(-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k})$. Leiten Sie aus der Bedingung in (d) her, dass die Eigenfrequenzen gleich

$$\omega_1^2 = 0\,, \quad \omega_2^2 = \frac{k}{m} \quad \omega_3^2 = \frac{k}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\right) \tag{1.3}$$

sind.

(f) Bestimmen Sie die zu den drei obigen ω_s^2 gehörigen Eigenamplituden $\vec{a}^{(s)}$, mit $s = 1, 2, 3$. Orthonormieren Sie die Eigenvektoren mit

$$a_i^{(s')}\, m_{ij}\, a_j^{(s)} = \delta^{s's}\,. \tag{1.4}$$

(g) Was ist die geometrische Beschreibung der Schwingungsart jedes Eigenvektors $\vec{a}^{(s)}$?

(h) Die Eigenvektoren $\vec{a}^{(s)}$ erfüllen auch die Bedingung $a_i^{(s')}\, k_{ij}\, a_j^{(s)} = \omega_s^2 \delta^{s's}$. Wie in der Vorlesung gezeigt, lassen sich die Auslenkungen aus der Ruhelage schreiben als

$$\vec{\xi}(t) = \sum_{s=1}^{3} r_s(t) \vec{a}^{(s)}, \tag{1.5}$$

mit Normalkoordinaten r_s. Die Lagrangefunktion lässt sich dann schreiben als eine Summe von drei Lagrangefunktionen,

$$L = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{3} [\dot{r}_s^2 - \omega_s^2 r_s^2]. \tag{1.6}$$

sodass die Normalkoordinaten unabhängig voneinander sind. Die Bewegungsgleichungen für die einzelnen r_s haben die bekannte Form:

$$\ddot{r}_s + \omega_s^2 r_s = 0 \quad \Rightarrow \quad r_s(t) = C_s \cos(\omega_s t + \varphi_s), \tag{1.7}$$

beziehungsweise $r_s(t) = C_s + D_s t$ falls $\omega_s = 0$. Es seien nun für die drei Atomen die folgenden Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ vorgegeben:

$$\vec{q}(t = 0) = \begin{pmatrix} -\frac{8}{10}\ell \\ -\frac{2m\ell}{10M} \\ \ell \end{pmatrix} \quad , \quad \dot{\vec{q}}(t = 0) = \vec{0}. \tag{1.8}$$

Bestimmen Sie daraus die Konstanten C_s und φ_s (bzw. C_s und D_s), welche die Bewegung des Moleküls charakterisieren.

Aufgabe 2: Vier Glasperlen auf einem Ring — 9 Punkte

Vier Glasperlen der Masse m (nummeriert von 1 bis 4) bewegen sich auf einem Ring mit dem Radius r, wie in Abbildung 2 gezeigt. Die Perlen sind mit Federn verbunden mit der Eigenschaft, dass die potentielle Energie einer Feder zwischen zwei Perlen an den Winkeln θ_i und θ_j durch $U = \frac{1}{2}kr^2(\theta_j - \theta_i)^2$ gegeben ist.

(a) Eine mögliche Ruhelage für das System ist bei $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/2$, $\theta_3 = \pi$ und $\theta_4 = 3\pi/2$. Führen Sie neue Koordinaten ξ_i relativ zur Ruhelage ein und geben Sie die Lagrangefunktion in Abhängigkeit dieser neuen Koordinaten ξ_i.

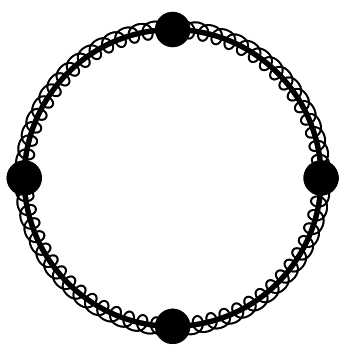

Abbildung 2

(b) Zeigen Sie, dass die durch Gleichung (1.1) definierte symmetrische Matrizen $\hat{m}$ und $\hat{k}$ durch

$$\hat{m} = mr^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \hat{k} = kr^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

gegeben sind.

(c) In diesem Fall findet man

$$\det(-\omega^2 \hat{m} + \hat{k}) = mr^8 \omega^2 (m\omega^2 - 2k)^2 (m\omega^2 - 4k) . \tag{2.2}$$

Was sind also die Eigenfrequenzen des Systems?

(d) Bestimmen Sie die vier *orthonormierte* Eigenvektoren $\vec{a}^{(s)}$, siehe Gleichungen (1.2) und (1.4).

(e) Ordnen Sie jede Eigenfrequenz und jeden Eigenvektor der richtigen Skizze in Abbildung 3 zu.

Mit Hilfe von Gleichung (1.5) ist damit die allgemeine Lösung der Schwingungsbewegung festgelegt. Alternativ können die Eigenvektoren und Eigenwerten aus der Symmetrie des Problems bestimmt werden.

(f) Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion symmetrisch ist unter einer Drehung des Systems um 180 Grad, also unter der Transformation $\vec{\xi} \to \vec{\xi}' = \hat{S}\vec{\xi}$, mit

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.3}$$

Zeigen Sie auch, das $\hat{S}^2 = 1$ gilt, dass also $\hat{S}$ die Eigenwerte $\lambda = \pm 1$ hat.

(g) Bestimmen Sie die allgemeine Form der Eigenvektoren $\vec{a}_+$ und $\vec{a}_-$ (jeder in Abhängigkeit von zwei freien Parametern) der Matrix $\hat{S}$ mit Eigenwerten $\lambda = \pm 1$.

(h) Benutzen Sie die Lagrangefunktion aus (a) um die Euler-Lagrange Gleichungen für $\vec{\xi}$ herzuleiten.

(i) Lösen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen mit den Ansätzen $\vec{\xi} = \vec{a}_\pm \cos(\omega t + \phi)$ und bestimmen Sie damit sowohl die vier Eigenfrequenzen ω_s^2 als auch die vier Eigenvektoren $\vec{a}_s$.

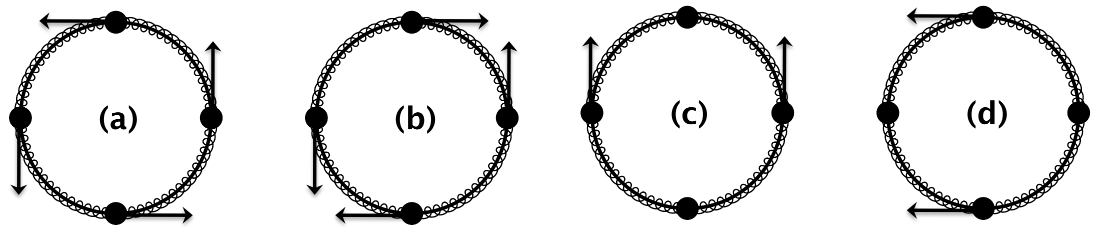

Abbildung 3