Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. Jaquier, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 8

Ausgabe: 14.06 – Abgabe: 21.06 @ 09:45 Uhr – Besprechung: 24.06 & 25.06

– Auf Lösungen bitte Name, Matrikelnummer, Tutoriumnummer sowie Tutor(in) vermerken –

Aufgabe 1: Schwingungen auf einer Kreisbahn **7 Punkte**

In dieser Aufgabe betrachten wir das in Abbildung 1 gezeigte System. Ein Teilchen der Masse m und elektrischer Ladung q kann sich frei auf der Kreisbahn mit Radius r bewegen. Es wird durch eine nach unten wirkende Schwerkraft mg beeinflusst. Zudem ist am untersten Punkt der Bahn ein Teilchen (ebenfalls mit Ladung q) fixiert, das das andere Teilchen durch die Coulomb-Kraft abstößt. Wir wählen die Einheiten so, dass das Coulomb-Potential zwischen zwei Teilchen mit Ladung q und Abstand d durch q^2/d gegeben ist.

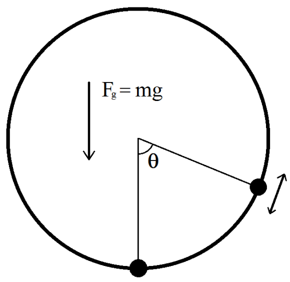

Abbildung 1

(a) Zeigen Sie, dass die Lagrange Funktion für das bewegliche Teilchen durch

$$L = \tfrac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + mgr\cos(\theta) - \frac{q^2}{2r\sin(\theta/2)} \tag{1.1}$$

gegeben ist.

(b) Es wird angenommen, dass $K = \frac{q^2}{8mgr^2} < 1$, sodass ein Gleichgewichtszustand des beweglichen Teilchens, bei einem Winkel θ_0 zwischen $\theta = 0$ und $\theta = \pi$, besteht. Finden Sie diesen Gleichgewichtswinkel und drücken Sie ihn durch r, g, m und q aus.

(c) Wählen Sie eine neue Koordinate $\xi = \theta - \theta_0$ und zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion in der Nähe des Gleichgewichtswinkel θ_0 als

$$L = \frac{a}{2}\dot{\xi}^2 - \frac{b}{2}\xi^2, \tag{1.2}$$

genähert werden kann. Bestimmen Sie a und b.

(d) Wie kann die neue Koordinate ξ alternativ gewählt werden, damit die Näherung der Lagrangefunktion durch

$$L = \frac{m}{2}\dot{\xi}^2 - \frac{b'}{2}\xi^2, \tag{1.3}$$

gegeben ist?

(e) Die Bewegung besteht aus kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage. Schreiben Sie die Bewegungsgleichung unter Verwendung der genäherten Lagrangefunktion in Gleichung (1.2) oder Gleichung (1.3) und bestimmen Sie die Kreisfrequenz ω dieser Schwingungen.

Aufgabe 2: Erzwungene Schwingungen — 3 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir die Auswirkungen einer externen Kraft auf einen harmonischen Oszillator. Dies bezeichnet man als erzwungene Schwingung.

(a) Erzwungene Schwingungen lösen die Gleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m} \,. \tag{2.1}$$

Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, ist die spezielle Lösung

$$x_p(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{F(\tau)}{m\omega} \sin(\omega(t-\tau)) d\tau \,, \tag{2.2}$$

wobei t_0 eine beliebige Konstante ist. Das bedeutet, dass die allgemeine Lösung durch

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) + x_p(t) \,, \tag{2.3}$$

gegeben ist, wobei A und ϕ freie Parameter sind. Prüfen Sie die Gültigkeit dieser Lösung, indem Sie Gleichung (2.3) in Gleichung (2.1) einsetzen.

(b) Ein häufig auftretender Fall ist eine harmonische Kraft $F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$, wobei sich Ω im Allgemeinen von der Eigenfrequenz ω unterscheidet. Leiten Sie für diese harmonische Kraft den generellen Ausdruck für $x(t)$ her. Sie können $t_0 = 0$ annehmen.

Aufgabe 3: Gedämpfte Schwingungen — 4 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir gedämpfte Schwingungen in einer Dimension. Gedämpfte Schwingungen ergeben sich durch die Einwirkung einer Kraft

$$F = -kx - \mu\dot{x} \,.$$

Die Bewegungsgleichung ist dann gegeben als

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \,. \tag{3.1}$$

(a) Drücken Sie γ und ω_0 für ein Teilchen der Masse m in Abhängigkeit von k, μ und m aus.

(b) Wenn $\gamma < 2\omega_0$, nennt man die Schwingung "schwach gedämpft". Überprüfen Sie, dass in diesem Fall die Bewegungsgleichung durch

$$x = x_0 e^{-\gamma t/2} \cos(\omega_d t) \tag{3.2}$$

gelöst wird, wobei

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}\,. \tag{3.3}$$

(c) Was ist das Verhältnis der Amplituden von zwei aufeinanderfolgenden Schwingungen eines schwach gedämpften Oszillators zur gleichen Seite hin?

(d) Wenn Reibung in Betracht gezogen wird, ist die Energie des Teilchens nicht erhalten. Was ist die Energie von einem schwach gedämpften Oszillator als Funktion der Zeit? (Nehmen Sie an, dass $\gamma \ll \omega_0$.)