Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. Jaquier, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 7

Ausgabe: 07.06 – Abgabe: 14.06 @ 09:45 Uhr – Besprechung: 17.06 & 18.06

– Auf Lösungen bitte Name, Matrikelnummer, Tutoriumnummer sowie Tutor(in) vermerken –

Aufgabe 1: Streuung an einer Oberfläche — 5 Punkte

In der Vorlesung haben wir den Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Teilchens an einer massiven Kugel berechnet. In dieser Aufgabe betrachten wir die elastische Streuung von Teilchen, welche von $z = -\infty$ mit Anfangsgeschwindigkeit parallel zur z-Achse einfallen, an einem massiven Objekt, beschrieben durch die Punkte

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \sqrt{x^2 + y^2} \leq b \sin(\tfrac{z}{a}) \text{ und } 0 \leq z \leq \pi a\right\} . \tag{1.1}$$

Das bedeutet dass der Rand des Objektes eine Rotationsfläche um die z-Achse ist, welche durch

$$\rho(z) = b \sin\left(\frac{z}{a}\right) \quad \text{für} \quad 0 \leq z \leq \pi a , \tag{1.2}$$

generiert wird. Die Parameter a und b sind positiv.

(a) Skizzieren Sie die Rotationsfläche. Zeichnen Sie den Pfad eines Teilchens mit Stoßparameter $0 < \rho < b$ und deuten Sie den Streuwinkel θ an. Zeigen Sie mit Hilfe der Skizze, dass der halbe Streuwinkel mit der Steigung der Fläche zusammenhängt:

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{d\rho(z)}{dz} . \tag{1.3}$$

(b) Leiten Sie aus Gleichung (1.3) das Verhältnis zwischen dem Stossparameter und dem Streuwinkel

$$\rho(\theta) = \sqrt{b^2 - a^2 \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \tag{1.4}$$

her.

(c) Berechnen Sie den differenziellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi\rho(\theta) \left|\frac{d\rho(\theta)}{d\theta}\right| . \tag{1.5}$$

(d) Was sind die minimalen und maximalen Werte des Streuwinkels, θ_{min} und θ_{max}, welche den Stossparametern $\rho \to b$ und $\rho \to 0$ entsprechen?

(e) Berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} d\theta \, \frac{d\sigma}{d\theta} \; . \tag{1.6}$$

Können Sie das einfache Ergebnis für σ geometrisch begründen?

Aufgabe 2: Streuung am $1/r^2$ Potenzial — 4 Punkte

In der Vorlesung wurde die Streuung an einem Coulomb-Potenzial $U(r) = \pm\alpha/r$ besprochen und die berühmte Rutherfordformel

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2 \frac{2\pi}{\sin^4(\theta/2)} \tag{2.1}$$

hergeleitet. In dieser Aufgabe berechnen wir den Wirkungsquerschnitt für die Streuung an einem stärker lokalisierten, abstoßenden Potenzial,

$$U(r) = \alpha/r^2 \quad \text{mit} \quad \alpha > 0 \; . \tag{2.2}$$

Der Streuwinkel ist durch

$$\theta = \pi - 2\rho \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2/r^2 - U(r)/E}} \tag{2.3}$$

gegeben. Die untere Grenze $r_{\min}$ ist gleich dem Abstand zwischen dem Ursprung und dem Wendepunkt.

(a) Zeigen Sie, dass in diesem Fall $r_{\min} = \sqrt{\rho^2 + \alpha/E}$.

(b) Führen Sie das Integral in Gleichung (2.3) aus und zeigen Sie, dass ein Teilchen mit Energie E und Stossparameter ρ mit dem Winkel

$$\theta = \pi \left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \alpha/E}}\right) \tag{2.4}$$

abgelenkt wird.

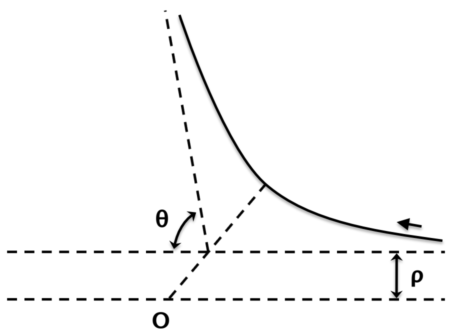

Abbildung 1: Definition des Stossparameters ρ und Streuwinkels θ.

(c) Invertieren Sie Gleichung (2.4) um $\rho = \rho(\theta)$ zu bestimmen. Zeigen Sie, dass der differenzielle Wirkungsquerschnitt, definiert in Gleichung (1.5) in der vorherigen Aufgabe, durch

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{2\pi^3\alpha}{E}\,\frac{\pi-\theta}{\theta^2(2\pi-\theta)^2} \tag{2.5}$$

gegeben ist.

(d) Skizzieren Sie den differenziellen Wirkungsquerschnitt als Funktion von θ zwischen $\theta = 0$ und $\theta = \pi$. Was ist die Funktion für $\theta \to 0$? Ist der totale Wirkungsquerschnitt endlich oder divergent?

Aufgabe 3: Teilcheneinfang **9 Punkte**

In dieser Aufgabe sind wir an einem Prozess interessiert, in dem ein Teilchen von weit weg herkommt und sich für $t \to \infty$ zum Ursprung $r = 0$ bewegt. Anders gesagt, das Teilchen wird durch das Zentralpotenzial eingefangen.

(a) Die charakteristische Eigenschaft dieses Problems ist, dass es *keinen* Wendepunkt gibt. Zeigen Sie, dass dies impliziert, dass die Energie E größer als das effektive Potenzial $U_{\text{eff}}(r) = U(r) + E\rho^2/r^2$ sein muss:

$$E - U_{\text{eff}}(r) > 0 \quad \text{für alle } r\ . \tag{3.1}$$

(b) Damit Gleichung (3.1) gültig ist, muss $U_{\text{eff}}(r)$, insbesondere für $r \to 0$, endlich sein. Zeigen Sie, dass Teilcheneinfang nur möglich ist wenn $U(r)$ wie $-\beta/r^2$, mit $\beta > E\rho^2$, nach $-\infty$ geht oder wenn $U(r)$ proportional zu $-1/r^n$ mit $n > 2$ ist.

Betrachten wir ein anziehendes Potenzial $U(r) = -\beta/r^2$ mit $\beta > 0$.

(c) Berechnen Sie das effektive Potenzial $U_{\text{eff}}(r)$ und skizzieren Sie es für die zwei Fälle $\beta > E\rho^2$ und $\beta < E\rho^2$.

(d) Was sind die minimalen und maximalen Werte des Stossparameters, für die Teilcheneinfang stattfindet? Berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt für Teilcheneinfang,

$$\sigma = \int d\sigma = \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} d\rho\, 2\pi\rho\ . \tag{3.2}$$

Betrachten wir jetzt das Potenzial $U(r) = \alpha/r - \beta/r^2$ mit $\alpha > 0$ und $\beta > E\rho^2$.

(e) Skizzieren Sie das effektive Potenzial $U_{\text{eff}}(r)$ in diesem Fall.

(f) Berechnen Sie den maximalen Wert U_0 des effektiven Potenzials.

(g) Damit ein Teilchen das Zentrum erreichen kann, muss die Energie echt größer als U_0 sein. Zeigen Sie, dass dies eine obere Grenze an den Stossparameter impliziert:

$$\rho^2 < \frac{\beta}{E} - \frac{\alpha^2}{4E^2} \ . \tag{3.3}$$

(h) Nutzen Sie die Tatsache, dass der Stossparameter positiv ist, um herzuleiten, dass

$$E > \frac{\alpha^2}{4\beta} \ , \tag{3.4}$$

damit ein Teilchen das Zentrum erreichen kann.

(i) Zeigen Sie, dass der totale Wirkungsquerschnitt für Teilcheneinfang durch

$$\sigma = \begin{cases} \pi \left(\frac{\beta}{E} - \frac{\alpha^2}{4E^2} \right) & \text{falls } E > \frac{\alpha^2}{4\beta} \ , \\ 0 & \text{falls } E < \frac{\alpha^2}{4\beta} \ , \end{cases} \tag{3.5}$$

gegeben ist.