

Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. Jaquier, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 7

Ausgabe: 07.06 – Abgabe: 14.06 @ 09:45 Uhr – Besprechung: 17.06 & 18.06

– Auf Lösungen bitte Name, Matrikelnummer, Tutoriumnummer sowie Tutor(in) vermerken –

Aufgabe 1: Streuung an einer Oberfläche

5 Punkte

In der Vorlesung haben wir den Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Teilchens an einer massiven Kugel berechnet. In dieser Aufgabe betrachten wir die elastische Streuung von Teilchen, welche von $z = -\infty$ mit Anfangsgeschwindigkeit parallel zur z -Achse einfallen, an einem massiven Objekt, beschrieben durch die Punkte

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq b \sin\left(\frac{z}{a}\right) \text{ und } 0 \leq z \leq \pi a\}. \quad (1.1)$$

Das bedeutet dass der Rand des Objektes eine Rotationsfläche um die z -Achse ist, welche durch

$$\rho(z) = b \sin\left(\frac{z}{a}\right) \text{ für } 0 \leq z \leq \pi a, \quad (1.2)$$

generiert wird. Die Parameter a und b sind positiv.

- (a) Skizzieren Sie die Rotationsfläche. Zeichnen Sie den Pfad eines Teilchens mit Stoßparameter $0 < \rho < b$ und deuten Sie den Streuwinkel θ an. Zeigen Sie mit Hilfe der Skizze, dass der halbe Streuwinkel mit der Steigung der Fläche zusammenhängt:

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{d\rho(z)}{dz}. \quad (1.3)$$

- (b) Leiten Sie aus Gleichung (1.3) das Verhältnis zwischen dem Stossparameter und dem Streuwinkel

$$\rho(\theta) = \sqrt{b^2 - a^2 \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (1.4)$$

her.

- (c) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi\rho(\theta) \left| \frac{d\rho(\theta)}{d\theta} \right|. \quad (1.5)$$

- (d) Was sind die minimalen und maximalen Werte des Streuwinkels, θ_{\min} und θ_{\max} , welche den Stossparametern $\rho \rightarrow b$ und $\rho \rightarrow 0$ entsprechen?

(e) Berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} d\theta \frac{d\sigma}{d\theta}. \quad (1.6)$$

Können Sie das einfache Ergebnis für σ geometrisch begründen?

Aufgabe 2: Streuung am $1/r^2$ Potenzial

4 Punkte

In der Vorlesung wurde die Streuung an einem Coulomb-Potenzial $U(r) = \pm\alpha/r$ besprochen und die berühmte Rutherfordformel

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2 \frac{2\pi}{\sin^4(\theta/2)} \quad (2.1)$$

hergeleitet. In dieser Aufgabe berechnen wir den Wirkungsquerschnitt für die Streuung an einem stärker lokalisierten, abstoßenden Potenzial,

$$U(r) = \alpha/r^2 \quad \text{mit} \quad \alpha > 0. \quad (2.2)$$

Der Streuwinkel ist durch

$$\theta = \pi - 2\rho \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2/r^2 - U(r)/E}} \quad (2.3)$$

gegeben. Die untere Grenze r_{\min} ist gleich dem Abstand zwischen dem Ursprung und dem Wendepunkt.

- (a) Zeigen Sie, dass in diesem Fall $r_{\min} = \sqrt{\rho^2 + \alpha/E}$.
- (b) Führen Sie das Integral in Gleichung (2.3) aus und zeigen Sie, dass ein Teilchen mit Energie E und Stossparameter ρ mit dem Winkel

$$\theta = \pi \left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \alpha/E}} \right) \quad (2.4)$$

abgelenkt wird.

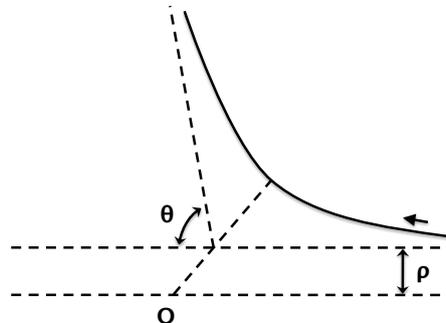


Abbildung 1: Definition des Stossparameters ρ und Streuwinkels θ .

- (c) Invertieren Sie Gleichung (2.4) um $\rho = \rho(\theta)$ zu bestimmen. Zeigen Sie, dass der differentielle Wirkungsquerschnitt, definiert in Gleichung (1.5) in der vorherigen Aufgabe, durch

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{2\pi^3\alpha}{E} \frac{\pi - \theta}{\theta^2(2\pi - \theta)^2} \quad (2.5)$$

gegeben ist.

- (d) Skizzieren Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt als Funktion von θ zwischen $\theta = 0$ und $\theta = \pi$. Was ist die Funktion für $\theta \rightarrow 0$? Ist der totale Wirkungsquerschnitt endlich oder divergent?

Aufgabe 3: Teilcheneinfang

9 Punkte

In dieser Aufgabe sind wir an einem Prozess interessiert, in dem ein Teilchen von weit weg herkommt und sich für $t \rightarrow \infty$ zum Ursprung $r = 0$ bewegt. Anders gesagt, das Teilchen wird durch das Zentralpotenzial eingefangen.

- (a) Die charakteristische Eigenschaft dieses Problems ist, dass es *keinen* Wendepunkt gibt. Zeigen Sie, dass dies impliziert, dass die Energie E größer als das effektive Potenzial $U_{\text{eff}}(r) = U(r) + E\rho^2/r^2$ sein muss:

$$E - U_{\text{eff}}(r) > 0 \quad \text{für alle } r. \quad (3.1)$$

- (b) Gleichung (3.1) muss insbesondere für $r \rightarrow 0$ gültig sein. Zeigen Sie, dass Teilcheneinfang nur möglich ist wenn $U(r)$ wie $-\beta/r^2$, mit $\beta > E\rho^2$, nach $-\infty$ geht oder wenn $U(r)$ proportional zu $-1/r^n$ mit $n > 2$ ist.

Betrachten wir ein anziehendes Potenzial $U(r) = -\beta/r^2$ mit $\beta > 0$.

- (c) Berechnen Sie das effektive Potenzial $U_{\text{eff}}(r)$ und skizzieren Sie es für die zwei Fälle $\beta > E\rho^2$ und $\beta < E\rho^2$.
- (d) Was sind die minimalen und maximalen Werte des Stossparameters, für die Teilcheneinfang stattfindet? Berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt für Teilcheneinfang,

$$\sigma = \int d\sigma = \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} d\rho 2\pi\rho. \quad (3.2)$$

Betrachten wir jetzt das Potenzial $U(r) = \alpha/r - \beta/r^2$ mit $\alpha > 0$ und $\beta > E\rho^2$.

- (e) Skizzieren Sie das effektive Potenzial $U_{\text{eff}}(r)$ in diesem Fall.
- (f) Berechnen Sie den maximalen Wert U_0 des effektiven Potenzials.
- (g) Damit ein Teilchen das Zentrum erreichen kann, muss die Energie echt größer als U_0 sein. Zeigen Sie, dass dies eine obere Grenze an den Stossparameter impliziert:

$$\rho^2 < \frac{\beta}{E} - \frac{\alpha^2}{4E^2}. \quad (3.3)$$

- (h) Nutzen Sie die Tatsache, dass der Stossparameter positiv ist, um herzuleiten, dass

$$E > \frac{\alpha^2}{4\beta}, \quad (3.4)$$

damit ein Teilchen das Zentrum erreichen kann.

- (i) Zeigen Sie, dass der totale Wirkungsquerschnitt für Teilcheneinfang durch

$$\sigma = \begin{cases} \pi \left(\frac{\beta}{E} - \frac{\alpha^2}{4E^2} \right) & \text{falls } E > \frac{\alpha^2}{4\beta}, \\ 0 & \text{falls } E < \frac{\alpha^2}{4\beta}, \end{cases} \quad (3.5)$$

gegeben ist.