Karlsruher Institut für Technologie

Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. Jaquier, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 6

Ausgabe: 31.05 – Abgabe: 07.06 @ 09:45 Uhr – Besprechung: 11.06

– Auf Lösungen bitte Name, Matrikelnummer, Tutoriumnummer sowie Tutor(in) vermerken –

Aufgabe 1: Dreidimensionaler harmonischer Oszillator — 10 Punkte

Betrachten Sie zwei Teilchen der Masse m_1 und m_2, welche über einem sphärischen Oszillatorpotential $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \alpha(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2$ miteinander wechselwirken.

(a) Zeigen Sie, dass die Bewegung der zwei Teilchen durch die Bewegung eines freien Teilchens der Masse m sowie eines Teilchens der Masse μ in einem Zentralpotential $U(\vec{r}) = U(r)$ beschrieben werden kann. Bestimmen Sie m und μ.

(b) In der in der vorherigen Teilaufgabe gezeigten Aufteilung der Bewegung ist die Bewegung des freien Teilchens nicht interessant und wird hier nicht weiter diskutiert. Argumentieren Sie, dass die Bewegung des Teilchens im Potential $U(r)$ in einer Ebene stattfindet, sodass die Teilchenbahn durch die Polarkoordinaten r und φ beschrieben werden kann. Zeigen Sie ausserdem, dass die Energie des Teilchens geschrieben werden kann als

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r). \tag{1.1}$$

Bestimmen und skizzieren Sie $U_{\text{eff}}(r)$.

(c) Finden Sie das Minimum $U_{\text{eff,min}}$ des effektiven Potentials und bestimmen Sie die Wendepunkte r_A und r_B in der Annahme, dass das Teilchen eine Energie $E > U_{\text{eff,min}}$ hat.

(d) Für die Geschwindigkeit des Teilchens lässt sich der Ausdruck

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\frac{M}{\mu r^2} \tag{1.2}$$

schreiben, wobei M der Betrag des Drehimpulses ist. Zeigen Sie damit, dass für eine geeignete Wahl der Integrationskonstanten

$$\varphi = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{\frac{M^2}{\mu r^2} - E}{\sqrt{E^2 - \frac{2\alpha M^2}{\mu}}}\right) \tag{1.3}$$

gilt. Hinweis: verwenden Sie das Integral

$$\int \frac{dz}{\sqrt{az^2 + bz + c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\arccos\left(-\frac{b + 2az}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right), \tag{1.4}$$

und die Variablensubstitution $z = 1/r^2$.

(e) Berechnen Sie die Winkelverschiebung $\Delta\varphi$, die sich ergibt, wenn das Teilchen von $r = r_A$ nach $r = r_B$ pendelt. Bestimmen Sie daraus, ob die Bahn offen oder geschlossen ist.

(f) Invertieren Sie das Resultat in Gleichung (1.3) um die Bahn $r(\varphi)$ zu bestimmen. Welchem Wert von φ entspricht der minimale Radius $r = r_A$?

(g) Zeigen Sie, dass die kartesischen Koordinaten x und y des Teilchens der Gleichung einer Ellipse,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1.5}$$

genügen.

(h) Fertigen Sie eine Skizze der Bahn des Teilchens in der (x, y)-Ebene an und zeichnen Sie r_A und r_B sowie ein beliebiger Wert $r(\varphi)$ mit zugehörigem φ ein.

Aufgabe 2: Präzession des Perihels $\boxed{\textbf{10 Punkte}}$

Eine der Vorhersagen von Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie ist, dass Planetenbahnen kein Ellipsen sind. Stattdessen dreht sich ihr Perihel (der Bahnpunkt mit dem geringsten Abstand zur Sonne) langsam um die Sonne. Die korrekte Vorhersage dieses Effekts in der Merkurbahn, war der erste Triumph der Allgemeinen Relativitätstheorie und etablierte sie als Nachfolger der Newtonschen Gravitationstheorie. Der Effekt der relativistischen Korrekturen kann durch einen zusätzlichen Term im Gravitationspotenzial proportional zu r^{-2} modelliert werden. Das ganze Potenzial ist dann durch

$$U(\vec{r}) = -\frac{k}{r} + \frac{C}{r^2} \tag{2.1}$$

gegeben, wobei k dieselbe Konstante wie in der Newtonschen Gravitationtheorie ist und C die relativistische Korrektur parametrisiert.

(a) Geben Sie die Lagrangefunktion für ein Objekt mit Masse m in diesem dreidimensionalen Potenzial an. Welche Erhaltungsgrößen gibt es? Erklären Sie warum dadurch die Bewegung in einer zweidimensionalen Ebene stattfindet und natürlicherweise durch Polarkoordinaten r und φ beschrieben wird.

(b) Für ein Objekt in einem Zentralpotenzial, kann φ durch r ausgedrückt werden als

$$\varphi = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{M^2} - \frac{2mU(r)}{M^2} - \frac{1}{r^2}}}\,, \tag{2.2}$$

wobei M die Größe des Drehimpulsvektors ist, und E die Energie ist. Zeigen Sie, dass die Bahn durch

$$r = \frac{\rho(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos(\alpha\varphi)}\,, \tag{2.3}$$

gegeben ist, wobei ρ, ϵ und α von E, M, m, k und C abhängen. Die Formel für α ist

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{2mC}{M^2}}\,. \tag{2.4}$$

Was sind die Formeln für ρ und ϵ?
Hinweis: folgen Sie den gleichen Schritten wie in der Herleitung der Keplerbahnen in der Vorlesung und benutzen Sie das Integral

$$\int \frac{dz}{\sqrt{az^2 + bz + c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arccos\left(-\frac{b + 2az}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right), \tag{2.5}$$

und die Variablensubstitution $z = 1/r$.

(c) Skizzieren Sie die Bahn für Werte von α nahe eins. Deuten Sie α, ρ und ϵ auf der Skizze an. Was ist der wesentliche Unterschied zwischen den Fällen $\alpha = 1$ und $\alpha \neq 1$?

(d) Nehmen Sie an, dass C viel kleiner als alle anderen Größen des Problems ist. Leiten Sie die Geschwindigkeit der Periheldrehung, d.h. die Änderung der Position des Winkels des Perihels nach jedem Bahnumlauf,

$$\delta\varphi \approx -2\pi \frac{mC}{M^2} \tag{2.6}$$

her.

(e) Einsteins' Theorie sagt vorher, dass

$$C = -3\,\frac{G^2\,m\,m_\odot^2}{c^2}\,, \tag{2.7}$$

wobei G die Newtonsche Konstante, $m_\odot$ die Masse der Sonne und c die Lichtgeschwindigkeit ist. Schreiben Sie die Geschwindigkeit der Periheldrehung um bis die Form

$$\delta\varphi \approx \frac{6\pi G m_\odot}{c^2(1 - \epsilon^2)\rho}\,. \tag{2.8}$$

Hinweis: Hier dürfen Sie die Newtonschen Formeln benutzen:

$$k = G\,m\,m_\odot\,, \qquad \rho = -\frac{G\,m\,m_\odot}{2E}\,, \qquad \epsilon \approx \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{mk^2}}\,. \tag{2.9}$$

(f) Der beobachtete Wert der Geschwindigkeit der Periheldrehung des Merkurs ist 5600 Bogensekunden pro Jahrhundert (eine Bogensekunde ist 1/3600 Grad), aber die größten Beiträge kommen aus Gravitationseffekten der anderen Planeten, welche auch durch die Newtonsche Gravitationstheorie beschrieben werden. Wie groß ist der relativistische Beitrag an der Geschwindigkeit der Periheldrehung des Merkurs?

Hinweis: Für den Planeten Merkur gilt: $\epsilon = 0.206$, $\rho = 57.9 \times 10^9$m, Bahnperiode $\tau = 88.0$ Tagen (am Erde), und $m = 3.30 \times 10^{23}$kg. Zusätzlich $m_\odot = 1.99 \times 10^{30}$kg, $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg \cdot s^2}}$ und $c = 3.00 \times 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.