SoSe 2019

Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. Jaquier, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 5

Ausgabe: 24.05 – Abgabe: 31.05 @ 09:45 Uhr – Besprechung: 03.06 & 04.06

– Auf Lösungen bitte Name, Matrikelnummer, Tutoriumnummer sowie Tutor(in) vermerken –

Aufgabe 1: Bewegung in unterschiedlichen Potentialen — 3 Punkte

Beschreiben Sie qualitativ (endlich/unendlich, Umkehrpunkte) die Bewegung eines Teilchens in den untenstehenden Potentialen. Gehen Sie insbesondere darauf ein, was für mögliche Arten der Bewegung in Abhängigkeit der Energie des Teilchens auftreten. (Im ersten Bild sind die zu betrachteten Energieniveaus eingezeichnet. Fertigen Sie für die zwei anderen Potentiale eine Skizze an und zeichnen Sie die relevanten Energiewerte ein.)

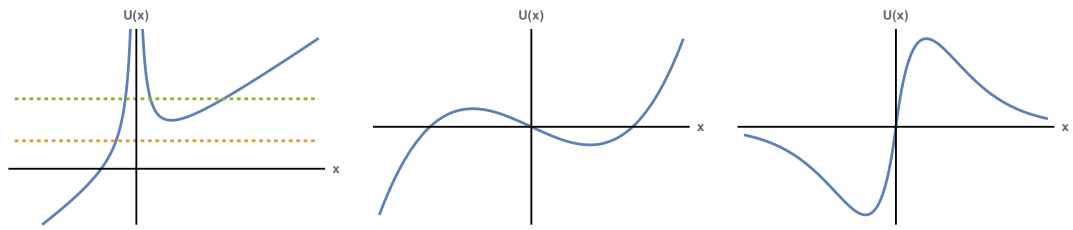

Abbildung 1: Verschiedene Potentiale

Aufgabe 2: Ursprung erreichen — 6 Punkte

Für die eindimensionale Bewegung eines Teilchens mit Masse m kann die Zeit, die es benötigt, um von einem festgelegten Anfangspunkt mit Koordinate x_0 zu einem Endpunkt mit zeitabhängiger Koordinate $x(t)$ zu kommen, durch das Integral

$$t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}\,, \tag{2.1}$$

geschrieben werden, wobei $x(t_0) = x_0$. In dieser Übung wird die Energie E des Teilchens auf Null gesetzt, sowie $U(x) \leq 0$ angenommen. Ausserdem wird die Koordinate x_0 des Startpunkts als positiv sowie die Anfangsgeschwindigkeit als negativ angenommen.

(a) Welches ist das korrekte Vorzeichen ($\pm$) in Gleichung (2.1) für die oben beschriebenen Anfangsbedingungen?

Betrachten Sie das Potential

$$U(x) = -C\,|x|\,, \tag{2.2}$$

wobei $|x|$ der Betrag von x und C eine positive Konstante ist.

(b) Skizzieren Sie das Potential $U(x)$. Zeichnen Sie in der Skizze die Koordinaten x_0 und $x(t)$ für eine Zeit $t > t_0$, so dass $x(t)$ immer noch positiv ist.

(c) Führen Sie das Integral in Gleichung (2.1) mit dem vorgegebenen $U(x)$ aus.

(d) Lösen sie das Resultat aus der vorherigen Teilaufgabe nach $x(t)$ auf und drücken Sie es in Abhängigkeit von C, m, x_0, t_0 und t aus.

(e) Wie lange braucht das Teilchen um den Ursprung $x(t) = 0$ zu erreichen?

(f) Wiederholen Sie die Teilaufgaben (b) – (e) für das Potential $U(x) = -C\,x^2$ mit $C > 0$.

Aufgabe 3: Periode analytisch berechnen — 4 Punkte

Für ein Teilchen der Masse m und Energie E, welches in einem eindimensionalen Potential zwischen den Punkten x_A und x_B pendelt, kann die Periode der Schwingung durch

$$T = \sqrt{2m}\int_{x_A}^{x_B} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - U(x)}} \tag{3.1}$$

geschrieben werden, wobei die Wendepunkte durch $E = U(x_{A,B})$ festgelegt sind. Berechnen Sie für die folgenden Potentiale die Periode der Schwingung in Abhängigkeit von E, m, C und α. Dabei sind C und α positive Konstanten.

(a) $U(x) = C|x|$ für $E > 0$

(b) $U(x) = -\frac{C}{\cosh^2(\alpha x)}$ für $-C < E < 0$

Hinweis: ein nützliches Integral ist

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{a - bz^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{b}z}{\sqrt{a}}\right). \tag{3.2}$$

Aufgabe 4: Mechanische Ähnlichkeit — 3 Punkte

Ein Teilchen mit Masse m bewegt sich in einem homogenen Potential von Grad n,

$$U(\lambda x) = \lambda^n U(x)\,. \tag{4.1}$$

Im univariaten Fall bedeutet es, dass $U(x) = U_0\,x^n$. Nehmen Sie an, dass das Potential ein Minimum hat, d.h. $U_0 > 0$ und $n = 2, 4, 6, \ldots$, und dass die Energie des Teilchens grösser als das Minimum U_0 ist. Dann oszilliert das Teilchen zwischen den zwei Wendepunkten $x_A(E)$ und $x_B(E)$ unter der Bedingung $E = U(x_{A,B})$.

(a) Zeigen Sie, dass die Periode T der Oszillation proportional zu $E^{1/n-1/2}$ ist. Hinweis: führen Sie eine geeignete Variablentransformation durch, ohne weiterhin das Integral auszuführen.

(b) Verwenden Sie das Resultat der vorherigen Teilaufgabe, um die Aussage der mechanischen Ähnlichkeit

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^{1-n/2} , \tag{4.2}$$

zwischen zwei Umlaufbahnen mit Perioden T_i und Ausmasse $L_i \sim (x_{A,B})_i$ herzuleiten.