Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. Jaquier, Dr. R. Rietkerk

Übungsblatt 4

Ausgabe: 17.05 – Abgabe: 24.05 @ 09:45 Uhr – Besprechung: 27.05 & 28.05

– Auf Lösungen bitte Name, Matrikelnummer, Tutoriumnummer sowie Tutor(in) vermerken –

Aufgabe 1: Ähnlichkeitstransformation — 6 Punkte

Betrachten Sie ein Teilchen mit Masse m und Position $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$, dessen Bewegung durch die Lagrange'sche Funktion $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r})$ beschrieben wird.

(a) Es sei $U(\lambda\vec{r}) = \lambda^{-2}U(\vec{r})$. Finden Sie eine infinitesimale Transformation von sowohl r_i als auch t der Form

$$t' = t + \epsilon X(\{r_j\}, t)\ , \quad r_i' = r_i + \epsilon\Psi_i(\{r_j\}, t)\ , \tag{1.1}$$

welche die Wirkung (aber nicht die Lagrange'sche Funktion) invariant lässt. Bestimmen Sie die damit verbundene Erhaltungsgröße

$$\vec{p}\cdot\vec{r} - 2Et = \text{const}\ . \tag{1.2}$$

(b) Es sei nun $U(\vec{r}) = -k/r^2$, mit $k > 0$. Bestätigen Sie das dies einen Spezialfall von Frage (a) darstellt, sodass also Gleichung (1.2) gilt. Argumentieren Sie, dass der Drehimpuls $\vec{M} = \vec{r}\times\vec{p}$ ebenfalls erhalten ist. Zeigen Sie, dass die dritte Erhaltungsgröße, die Energie, deswegen geschrieben werden kann als

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{k}{r^2}\ . \tag{1.3}$$

(c) Alle diese Erhaltungsgrößen sind nützlich, um die Bahnkurve relativ einfach zu bestimmen ohne Differenzialgleichungen zu lösen. Kombinieren Sie Gleichungen (1.2) und (1.3) um die radiale Bewegungsbahn herzuleiten,

$$r(t) = \sqrt{\frac{(2Et + \text{const})^2 + M^2 - 2mk}{2mE}}\ . \tag{1.4}$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\vec{p}\cdot\vec{r} = mr\dot{r}$.

Aufgabe 2: Noether-Theorem Verallgemeinerung $\boxed{\textbf{3 Punkte}}$

In der Vorlesung wurde ein allgemeiner Ausdruck für Erhaltungsgrößen hergeleitet, der aus der Invarianz der Wirkung unter infinitesimalen Transformation

$$q_i' = q_i + \epsilon\,\Psi_i(q,t)\,, \qquad t' = t + \epsilon\,X(q,t) \tag{2.1}$$

mit $q = \{q_j\}$ folgt. Hier betrachten wir nun den Fall, in dem sich die Lagrange'sche Funktion unter diese Transformation mit einer totalen Zeitableitung ändert:

$$L(q, dq/dt, t) = L(q', dq'/dt', t') + \epsilon\,\frac{df(q',t')}{dt'}\,, \tag{2.2}$$

wobei f eine Funktion der Koordinaten und der Zeit ist.

(a) Argumentieren Sie, dass der zusätzliche Term $\epsilon\,df(q',t')/dt'$ die Euler-Lagrange Gleichungen nicht ändern.

(b) Zeigen Sie, dass die Erhaltungsgröße in diesem Fall gegeben ist durch

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\Psi_i - X\dot{q}_i) + L\,X + f(q,t)\,. \tag{2.3}$$

Hinweis: folgen Sie den gleichen Schritten wie in der Vorlesung.

Aufgabe 3: Galileitransformationen $\boxed{\textbf{4 Punkte}}$

Betrachten wir eine (infinitesimale) Galilei-Transformation $q_i \to q_i + \epsilon w_i t$.

(a) Was ist die physikalische Interpretation dieser Transformation und was stellen die w_i dar?

(b) Leiten Sie eine Formel für die Erhaltungsgröße I eines freies Teilchen mit Masse m her, die aus der Invarianz der Wirkung unter Galilei-Transformationen folgt. Hinweis: bestimmen Sie Ψ_i, X und f in Gleichung (2.3).

(c) Zeigen Sie, dass dieses die Invarianz von

$$\chi_i = mq_i - p_i t\,, \tag{3.1}$$

für $i \in \{1,2,3\}$ impliziert ($p_i = m\dot{q}_i$ bezeichnet den Impuls).

(d) Ein freies Teilchen erhält die Energie (eine Gleichung), den Impuls (drei Gleichungen) und den Drehimpuls (drei Gleichungen). Zusätzlich sind die drei Größen in Gl. (3.1) erhalten. Insgesamt gibt es deshalb zehn Bewegungsintegrale, welche die Physik charakterisieren. Allerdings ist die Bewegung eines Teilchens in drei Dimensionen komplett festgelegt durch sechs Bedingungen (z.B. die Position und Geschwindigkeit bei $t = 0$). Warum ist das System durch die zehn Bewegungsintegrale nicht überbestimmt?

Aufgabe 4: Harmonischer Oszillator

$\boxed{\textbf{4 Punkte}}$

Die Bewegung des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit Masse m und Kreisfrequenz ω wird durch die folgende Lagrangefunktion beschrieben:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m}{2}\omega^2 x^2 \,. \tag{4.1}$$

(a) Zeigen Sie dass die Transformation, welche durch

$$t' = t\,, \quad x' = x + \epsilon\, \cos(\omega t)\,, \tag{4.2}$$

gegeben ist, die Lagrangefunktion bis auf der totalen Zeitableitung einer Funktion $f(x,t)$ invariant lässt.

(b) Bestimmen Sie die zu dieser Transformation gehörige Erhaltungsgröße I mit Hilfe von Gleichung (2.3).

(c) Die allgemeine Lösung der Euler-Lagrange Differentialgleichung ist

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t). \tag{4.3}$$

Verifizieren Sie damit, dass I tatsächlich erhalten ist. Bestimmen Sie die Koeffizienten A und B in Abhängigkeit der Erhaltungsgrösse I und der Energie E.

(d) Wir wollen nun die Lösung $x(t)$ algebraisch berechnen. Nutzen Sie dazu die Kenntnis der Erhaltungsgrössen E und I als Funktionen von $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ und bestimmen Sie $x(t)$ in Abhängigkeit von E und I. Verifizieren Sie, dass Sie damit die gleiche Lösung wie in der vorherigen Teilaufgabe erhalten.